1. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y} = t\mathrm{e}^{y},$$

mit $y = y(t)$.

   (a) Verwenden Sie das Taylor-Polynom zu e^x und geben Sie zwei lösbare Approximationen der Differentialgleichung an. Berechnen Sie die Lösung dieser Differentialgleichungen jeweils für $y(0) = 0$.

   (b) Lösen Sie die originale Differentialgleichung mit der Methode des Trennens der Variablen und vergleichen Sie die Lösung mit jenen aus (a).

   (c) Vergleichen Sie die Lösungen qualitativ, indem Sie diese Funktionen für $t \in [0, 2]$ skizzieren.

Lösung. $y_1(t) = \frac{1}{2}t^2$, $y_2(t) = \exp(\frac{1}{2}t^2) - 1$, $y(t) = -\ln|1 - \frac{1}{2}t^2|$

2. Lösen Sie die linearisierte Pendelgleichung für

$$\varphi(0) = \varphi_0 \qquad \text{und} \qquad \dot{\varphi}(0) = 1.$$

Lösung. $\varphi(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + \varphi_0 \cos(\omega t)$

3. Gegeben sei ein frei gedämpfter Oszillator mit externer Kraft in der Form $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, mit F_0 konstant und $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Die erzwungene Schwingungsgleichung lautet nun

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t).$$

   (a) Geben Sie die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung an.

   (b) Zeigen Sie, dass die erzwungene Schwingung die maximale Amplitude erreicht, wenn die Frequenz die Form $\omega = \sqrt{w_0^2 - (d^2/2m^2)}$ hat.

Hinweis. Verwenden Sie für (a) den Ansatz $x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Im Teil (b) ist e vorteilhaft, die Identität $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = R\cos(\omega t - \varphi)$ zu verwenden.

Lösung. (a) $x_p(t) = \frac{(k-m\omega^2)F_0}{(k-m\omega^2)^2+(d\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{d\omega F_0}{(k-m\omega^2)^2+(d\omega)^2}\sin(\omega t)$

4. Gegeben ist die Funktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $w(x, y) = \ln(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y)$. Bilden Sie das totale Differential der Funktion w. Bestimmen Sie weiters welche der folgenden Aussagen auf die Funktion w zutrifft und argumentieren Sie Ihre Entscheidung.

   (a) $\frac{2}{5}\frac{x}{y}\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (b) $2x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (c) $2x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (d) $\frac{2}{5}x\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

Lösung. $\mathrm{d}w = \frac{5}{5x-2y}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{5x-2y}\mathrm{d}y$

5. Betrachten Sie für $u = u(x,t)$ die (lineare) partielle Differentialgleichung (1. Ordnung) der Form
$$xu_x = u_t,$$
mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$. Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ für den Anfangswert $u(x,0) = x + 2x^3$.

   Lösung. $u(x,t) = x\mathrm{e}^t + 2x^3\mathrm{e}^{3t}$

6. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung
$$t^2 u_t + \frac{1}{x}u_x = u.$$
Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ für den Anfangswert $u(0,1) = 1$.

   Lösung. $u(x,t) = c\exp\left(\frac{1}{2}x^2(1-\ln(c)) - \frac{\ln(c)}{t})\right)$

7. Lösen Sie die Wellengleichung
$$u_{tt} = 4u_{xx}$$
für $x \in [0,5]$ und $t \in \mathbb{R}^+$. Die Anfangs- und Randbedingungen lauten
$$u(0,t) = u(5,t) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 5\sin(\pi x).$$

   Lösung. $u(x,t) = \frac{5}{2\pi}\sin(\pi x)\sin(2\pi t)$

8. Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi = \Phi(x,y,z)$.

   (a) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass
$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi$$
gilt.

   (b) Sei $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(x,y,z) = |\boldsymbol{r}| + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$. Berechnen Sie $\nabla\Phi$, sowie $\Delta\Phi$.

   Lösung. $\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} + 2\boldsymbol{r}$, $\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 6 - \frac{2}{|\boldsymbol{r}|}$