1. Gegeben sei die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 2\mathrm{e}^{3t}.$$

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung x_h der entsprechenden homogenen Differentialgleichung mit dem Ansatz $x_h = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Die homogene Lösung x_h ist eine Linearkombination von drei Fundamentallösungen.

   (b) Verwenden Sie weiters zur Berechnung einer Partikulärlösung einen geeigneten Ansatz. Geben Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung an.

   (c) Setzen Sie $y := \dot{x}$, $z := \ddot{x}$ und sei $\boldsymbol{v} := (x, y, z)^T$ mit $\dot{\boldsymbol{v}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$. Mit Hilfe von $\boldsymbol{v}$ kann nun die homogene Differentialgleichung 3. Ordnung als ein System 1. Ordnung $\dot{\boldsymbol{v}} = A\boldsymbol{v}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ formuliert werden. Geben Sie die Matrix A an.

   (d) Geben Sie in der Notation aus (c) die Lösung der Differentialgleichung in der Vektorform $\boldsymbol{v}$ an.
   Hinweis: Berechnen Sie $\dot{z} = \dddot{x}$ aus der gegebenen Differentialgleichung.

Lösung. (a) $x(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t\mathrm{e}^{-t} + c_3$,
(b) $x(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t\mathrm{e}^{-t} + c_3 + \frac{1}{24}\mathrm{e}^{3t}$,
(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\ddot{x}\,\cos t + x\,\cos t = 1.$$

   (a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem $\{x_1(t), x_2(t)\}$ an.

   (b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung $x_p(t)$.

Lösung. (a) $\{\cos t, \sin t\}$, (b) $\ln(\cos t)\cos t + t\sin t$

3. Lösen Sie die Eulersche Differentialgleichung

$$4t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 2t^4,$$

mit den Anfangsbedingungen $x(1) = 0$ und $\dot{x}(1) = 0$.

Lösung. $x(t) = \frac{8}{45}\sqrt[4]{t} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{45}t^4$

4. Betrachten Sie für $y = y(t)$ mit $t > 0$ die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \frac{3}{t}\dot{y} + \frac{y}{t^2} = \frac{\ln t}{t^2}.$$

Überprüfen Sie ob es sich um eine Euler-Differentialgleichung handelt und lösen Sie diese.

Lösung. $y(t) = c_1\frac{1}{t} + c_2\frac{1}{t}\ln t + \ln t - 2$

5. Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$(4t+1)\ddot{y} + (8t-2)\dot{y} + (-12t-15)y = 0$$

Eine der Lösungen hat die Form $y_1(t) = e^{\lambda t}$. Bestimmen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung mit Hilfe des Koeffizientenvergleichs den Wert für λ. Berechnen Sie weiters mit Hilfe von $y_1(t)$ eine zweite linear unabhängige Lösung.

Lösung. $\lambda = -3$, $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 t \mathrm{e}^{4t}$

6. Lösen Sie die inhomogene Differentiagleichung

$$(4t+1)\ddot{y} + (8t-2)\dot{y} + (-12t-15)y = \mathrm{e}^{t},$$

mit Verwendung von Resultaten aus dem Beispiel 5.

Lösung. $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-3t} + c_2 t \mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{t}$

7. Betrachten Sie für $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, die Differentialgleichung

$$t^3 x'' + t^2 x' - 4tx = 0.$$

   (a) Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$x_1(t) = t^{\alpha},$$

   mit $\alpha > 0$.

   (b) Berechnen Sie eine weitere linear unabhängige Lösung x_2 unter Zuhilfenahme der Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

   (c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $x(1) = 1$ und $x'(1) = 1$.

Lösung. $x(t) = \frac{3}{4}\, t^2 + \frac{1}{4}\, \frac{1}{t^2}$