1. **Gruppe A**

   Gegeben sei $f(x) = \arccos(\sqrt{1-x^2})$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f.

   Hinweis: Eine mögliche Methode wäre eine spezielle Substitution, außerdem gilt

   $$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Lösung.
   Substitution $x = \sin(u)$ führt auf das Integral

   $$\int \arccos\left(\sqrt{1-\sin^2(u)}\right)\cos(u)\,\mathrm{d}u = \int u\,\cos(u)\,\mathrm{d}u.$$

   Partielles Integrieren liefert

   $$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}.$$

   Gruppe B & C

   Gegeben sei $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f.

   Hinweis: Eine mögliche Methode wäre eine spezielle Substitution, außerdem gilt

   $$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Lösung.

   $$x\arccos(x) + \sqrt{1-x^2}$$

2. **Gruppe A, B & C**

Sei $w = 1 - \mathrm{i}$.

(a) Ermitteln Sie $\arg\left(w^8\right)$. Geben Sie das Ergebnis im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

(b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche $z^3 = w$ erfüllen.

Lösung.

(a) Die Exponentialdarstellung $w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ von $w = 1 - \mathrm{i}$ lautet

$$\begin{aligned} |w| &= \sqrt{2} \\ \varphi = \arctan(-1) &= \frac{-\pi}{4}. \end{aligned}$$

Somit lautet die Exponentialdarstellung $w = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}}$, da das Argument $\arg(w)$ im Intervall $[0, 2\pi)$ liegen muss.

Die Formeln von Moivre $z^n = |z|^n \exp(\mathrm{i}n\varphi)$ führt zu

$$\begin{aligned} w^8 &= (\sqrt{2})^8\,\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\cdot 8\mathrm{i}} \\ \arg(w^8) &= \frac{7\pi}{4} \cdot 8 = 14\pi \\ \Rightarrow \arg(w^8) &= 0 \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

(b) Mithilfe der Formel für komplexe Wurzeln

$$z_k = \sqrt[3]{|w|} \cdot \exp\left(\frac{\mathrm{i}\varphi}{3} + k\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\right),\ k = 0, 1, 2$$

ergibt sich für die Gleichung

$$\begin{aligned} z^3 &= w \\ z^3 &= \sqrt{2}\,\exp(\tfrac{7\pi}{4}\mathrm{i}) \end{aligned}$$

die Lösungen

$$\{z_0, z_1, z_2\} = \{\sqrt[6]{2} \cdot \exp(\tfrac{7\pi}{12}\mathrm{i}),\ \sqrt[6]{2} \cdot \exp(\tfrac{15\pi}{12}\mathrm{i}),\ \sqrt[6]{2} \cdot \exp(\tfrac{23\pi}{12}\mathrm{i})\}.$$

3. **Gruppe A & C**

Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\}$$

und das Skalarfeld $f(x,y) = x^2 y$.

(a) Berechnen Sie die Tangentialebene des Skalarfeldes im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s = s(t)$ für $t \in [0,1]$.

Lösung.

(a) Die Formel der Tangentialebene $T(x,y)$ im Punkt $\boldsymbol{r_0} = (x_0, y_0)$ lautet

$$T(x,y) = T(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r_0}) + \nabla f(\boldsymbol{r_0}) \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}).$$

Mit $\boldsymbol{r}_0 = (1,1)^T$ folgt

$$T(x,y) = 2x + y - 2.$$

(b) Die Bogenlänge über die parametrisierte Kurve $\boldsymbol{r}(t)$ berechnet sich mittels

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau.$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2\tau \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 4\tau^2} = 2\sqrt{1+\tau^2}$$

Somit berechnet sich die Bogenlänge als

$$s(t) = 2 \int_0^t \sqrt{1+\tau^2} \, \mathrm{d}\tau.$$

Die Substitution $\tau = \sinh(u)$ führt auf

$$2 \int_0^t \sqrt{1+\tau^2} \, \mathrm{d}\tau = 2 \int_0^t \cosh^2(u) \, \mathrm{d}u = t \cosh(\operatorname{arsinh} t) + \sinh t.$$

Gruppe B

Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2+2 \\ 1-2t \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\}$$

und das Skalarfeld $f(x,y) = xy^2$.

(a) Berechnen Sie die Tangentialebene des Skalarfeldes im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s = s(t)$ für $t \in [0,1]$.

Lösung

(a)

$$T(x,y) = x + 2y - 2$$

(b)

$$2t \cosh(\operatorname{arsinh}(t)) + 2\sinh(t)$$

4. **Gruppe A**

Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t + \mathrm{e}^t \\ t\sin t \end{pmatrix} : t \in [0, \pi] \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x + z\cos(yz) \\ y\cos(yz) \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ist.

(b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$, welches $\Phi(0, 1, \pi) = 1$ erfüllt.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Lösung.
(a) $\nabla \times \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ ist zu überprüfen.
(b) Für ein Potential muss $\nabla\Phi = \boldsymbol{f}$ erfüllt sein.

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z) &= \int f_1(x, y, z)\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{e}^x + C(y, z) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \mathrm{e}^x + \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} = f_2(x, y, z) = \mathrm{e}^x + z\cos(yz) \\
C(x, y) &= \int z\cos(yz)\,\mathrm{d}y \\
\frac{\partial \Phi}{\partial z} &= y\cos(yz) + \frac{\partial D(z)}{\partial z} = y\cos(yz)
\end{aligned}$$

Daraus folgt $D(z) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Somit ist das Potential

$$\Phi(x, y, z) = y \cdot \mathrm{e}^x + \sin(yz) + c.$$

Die Konstante c ergibt sich mit der Bedinung $\Phi(0, 1, \pi) = 1$ zu $c = 0$.
(c) Wegunabhängigkeit des Gradientenfeldes ausnutzen. Somit ist

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Phi(\boldsymbol{r}(b)) - \Phi(\boldsymbol{r}(a)) = \Phi(\boldsymbol{r}(\pi)) - \Phi(\boldsymbol{r}(0)) = \pi\mathrm{e}^{-\pi}.$$

Gruppe B & C

Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t + \mathrm{e}^t \\ t\sin t \end{pmatrix} : t \in [0, \pi] \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\cos x + z\exp(xz) \\ \sin x \\ x\exp(xz) \end{pmatrix}$$

(a) Weisen Sie nach, dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ist.

(b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$, welches $\Phi(1, \pi, 0) = 1$ erfüllt.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Lösung

(a) $\nabla \times \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ ist zu überprüfen.
(b)

$$\Phi(x, y, z) = \mathrm{e}^{xz} + y \sin x - \pi \sin(1)$$

(c) 0