1. **Gruppe A & B**

Betrachten Sie für $y = y(t)$ und $t > 0$ die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - \frac{2}{t^2} y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $y(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, *eine Lösung* der Differentialgleichung.

(b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten *eine zweite Lösung.*

Lösung.

(a) Zunächst berechnen wir die Ableitungen des Ansatzes.

$$\begin{aligned} y(t) &= t^\alpha \\ \dot{y}(t) &= \alpha t^{\alpha-1} \\ \ddot{y}(t) &= \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - 2t^{\alpha-2} = 0.$$

Da die Gleichung für alle $t > 0$ erfüllt sein muss, gilt $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = -1$. Da laut Angabe $\alpha > 0$ gilt, ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y_1(t) = Ct^2.$$

(b) Eine zweite Lösung soll mit Variation der Konstanten gefunden werden, der Ansatz hierfür ist $y(t) = C(t)t^2$. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{C}t^2 + 2Ct, \\ \ddot{y}(t) &= \ddot{C}t^2 + 4\dot{C}t + 2C. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt dies

$$\ddot{C}t^2 + 4\dot{C}t + 2C - 2C = 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\ddot{C}t + 4\dot{C} = 0.$$

Durch Ordnungsreduktion $z(t) = \dot{C}(t)$ erhalten wir die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $\dot{z}t + 4z = 0$, deren Lösung

$$z(t) = \tilde{c}t^{-4}$$

ist. Damit ergibt sich für $C(t) = \int z(t)\,\mathrm{d}t = c_1 t^{-3} + c_2$. Rückeinsetzen in den Ansatz liefert $y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^2$, womit eine zweite Lösung gegeben ist durch

$$y_2(t) = ct^{-1}.$$

Gruppe C

Betrachten Sie für $y = y(t)$ und $t > 0$ die Differentialgleichung

$$t^2 \ddot{y} - 6y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $y(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, *eine Lösung* der Differentialgleichung.

(b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten *eine zweite Lösung.*

Lösung.

(a)

$$y_1(t) = c_1 t^3$$

(b)

$$y_2(t) = c_2 t^{-2}$$

2. **Gruppe A & C**

Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung der Form

$$u_{xx} = \frac{1}{2} u_t,$$

wobei $u = u(x,t), 0 < x < 1$ und $t > 0$. Zusätzlich sind Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2\sin(4\pi x)$ gegeben.

Verwenden Sie den Separationsansatz und berechnen Sie damit die Lösung der gegebenen Gleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen.
Hinweis: Die Konstante κ ist negativ, setzen Sie daher die Konstante $\kappa = -\alpha^2$.

Lösung. Wir verwenden den Ansatz $u(x,t) = v(t)w(x)$, und setzen in die gegebene Gleichung ein.

$$\begin{aligned} v(t)w''(x) &= \frac{1}{2} v'(t)w(x) \\ \frac{w''(x)}{w(x)} &= \frac{1}{2} \frac{v'(t)}{v(t)} \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt beide Seiten gleich einer Konstante und verwenden dabei den Hinweis $\kappa = -\alpha^2$, also

$$\frac{w''(x)}{w(x)} = -\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{v'(t)}{v(t)}.$$

Wir lösen zuerst die Gleichung nach $v(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -2\alpha^2 \\ \ln(v(t)) &= -2\alpha^2 + \tilde{c} \\ v(t) &= c\,\mathrm{e}^{-2\alpha^2 t} \end{aligned}$$

Weiters lösen wir die Gleichung nach $w(x)$.

$$\begin{aligned} w''(x) &= -\alpha^2 w(x) \\ w''(x) + \alpha^2 w(x) &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, die wir mit Hilfe des Exponentialansatzes lösen, und erhalten

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \mathrm{i}\alpha.$$

Dies liefert mit der Eulerschen Formel die Lösung $w(x) = \tilde{c}_1 \cos(\alpha x) + \tilde{c}_2 \sin(\alpha x)$:

Damit hat die gesamte Lösung Form

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c\,\mathrm{e}^{-2\alpha^2 t} \left(\tilde{c}_1 \cos(\alpha x) + \tilde{c}_2 \sin(\alpha x)\right) \\ &= c_1 \mathrm{e}^{-2\alpha^2 t} \cos(\alpha x) + c_2 \mathrm{e}^{-2\alpha^2 t} \sin(\alpha x). \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den Anfangs- und Randbedingungen ergibt sich $c_1 = 0, c_2 = 2$ und $\alpha = 4\pi$, wodurch gilt

$$u(x,t) = 2\mathrm{e}^{-32\pi^2 t}\sin(4\pi x).$$

Gruppe B

Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung der Form

$$u_{xx} = \frac{1}{3}u_t,$$

wobei $u = u(x,t), 0 < x < 1$ und $t > 0$. Zusätzlich sind Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und die Anfangsbedingung $u(x,0) = 3\sin(4\pi x)$ gegeben.

Verwenden Sie den Separationsansatz und berechnen Sie damit die Lösung der gegebenen Gleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen.
Hinweis: Die Konstante κ ist negativ, setzen Sie daher die Konstante $\kappa = -\alpha^2$.

Lösung.

$$u(x,t) = c_1\mathrm{e}^{-3\alpha^2 t}\cos(\alpha x) + c_2\mathrm{e}^{-3\alpha^2 t}\sin(\alpha x)$$
$$u(x,t) = 3\mathrm{e}^{-48\pi^2 t}\sin(4\pi x)$$

3. **Gruppe A**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2xe^{2y} + y + a + \left(2x^2e^{2y} + x\right) y' = 0.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Differentialgleichung exakt?

(b) Bestimmen Sie für $a = 1$ ein erstes Integral.

Lösung.

(a) Die Exaktheit überprüfen wir mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung. Es gilt

$$\frac{d}{dy}\left(2xe^{2y} + y + a\right) = 4xe^{2y} + 1 \quad \text{und}$$
$$\frac{d}{dx}\left(2x^2e^{2y} + x\right) = 4xe^{2y} + 1.$$

Also ist die Integrabilitätsbedingung für alle $a \in \mathbb{R}$ erfüllt und die Differentialgleichung für alle $a \in \mathbb{R}$ exakt.

(b) Zunächst rechnen wir

$$\int 2xe^{2y} + y + 1\,dx = x^2e^{2y} + xy + x + c_1(y),$$
$$\int 2x^2e^{2y} + x\,dy = x^2e^{2y} + xy + c_2(x).$$

Damit erhalten wir als ein erstes Integral.

$$\Phi(x, y) = x^2e^{2y} + xy + x + C$$

Gruppe B & C

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$3y^2e^{3x} + y + \left(2ye^{3x} + x + a\right) y' = 0.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Differentialgleichung exakt?

(b) Bestimmen Sie für $a = 1$ ein erstes Integral.

Lösung.

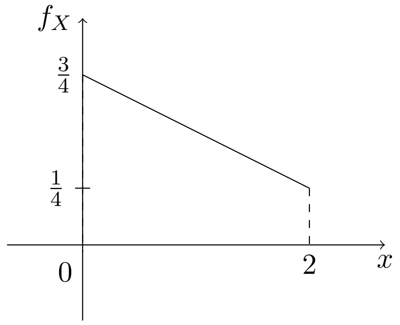
(a) Nachrechnen liefert, dass die Integrabilitätsbedingung wiederum für alle $a \in \mathbb{R}$ erfüllt ist und die Differentialgleichung für alle $a \in \mathbb{R}$ exakt.

(b)

$$\Phi(x, y) = y^2e^{3x} + xy + y + C$$

4. **Gruppe A & C**

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f_X, gegeben durch die Skizze



.

(a) Zeigen Sie, dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.

(b) Bestimmen Sie die zu f_X gehörige Verteilungsfunktion F_X und skizzieren Sie diese.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable X.

(d) Gegeben seien die Ereignisse $A = \{0 \leq X \leq \frac{2}{3}\}$ und $B = \{\frac{2}{9} \leq X \leq 2\}$. Berechnen Sie $P(B)$ und $P(A|B)$.

Lösung.

(a) Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann man von der Skizze ablesen.

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}, & x \in [0,2], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

nachzurechnen.

(b) Die Verteilungsfunktion im Intervall $[0, 2]$ erhalten wir folgendermaßen

$$\int_0^x \frac{3}{4} - \frac{1}{4}s\,\mathrm{d}s = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}x^2.$$

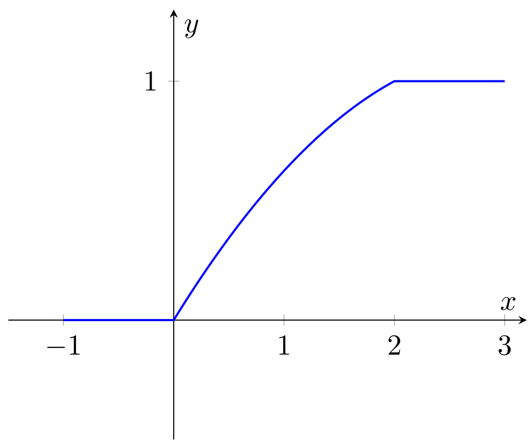
Damit ist die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}x^2 & x \in [0,2] \\ 1 & x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Die Skizze ist auf der nächsten Seite zu finden.

(c)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}$$

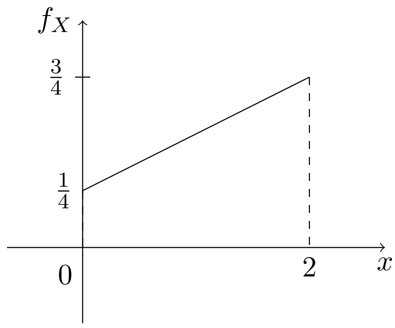


(d)

$$P(B) = F(2) - F(\tfrac{2}{9}) = \frac{68}{81}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\{\frac{2}{9} \le X \le \frac{2}{3}\}\right)}{P(B)} = \frac{23}{68}$$

Gruppe B

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f_X, gegeben durch die Skizze



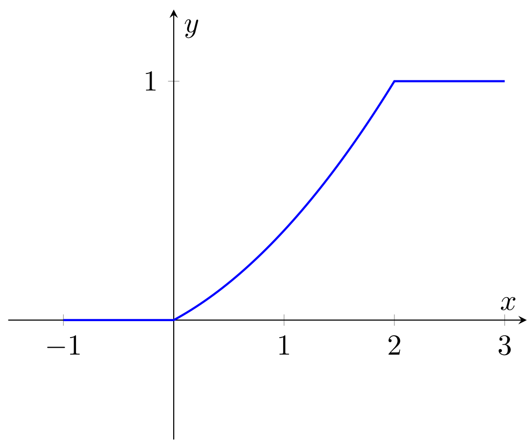
.

(a) Zeigen Sie, dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.
(b) Bestimmen Sie die zu f_X gehörige Verteilungsfunktion F_X und skizzieren Sie diese.
(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable X.
(d) Gegeben seien die Ereignisse $A = \{0 \le X \le \frac{5}{4}\}$ und $B = \{\frac{3}{4} \le X \le 2\}$. Berechnen Sie $P(B)$ und $P(A|B)$.

Lösung.

(a) Nachrechnen.
(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 & x \in [0, 2] \\ 1 & x \in (2, \infty). \end{cases}$$



(c) $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{6}$

(d) $P(B) = \frac{95}{128}$
$P(A|B) = \frac{32}{95}$