
Pflichtbeispiel: Gegeben sei eine Strecke C von Punkt $A = (1, 1)^T$ nach $B = (3, -2)^T$.

- (a) Gegeben sei ein Skalarfeld $f(x, y) = -2x^2y$.
Berechnen Sie das Kurvenintegral des Skalarfeldes f entlang der Strecke C .
- (b) Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = (2x - y, x^2)^T$.
Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes \mathbf{F} entlang der Strecke C .
-

1. (a) Die Bahn eines Massepunktes sei gegeben durch $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 7, 2t^3 - 1, t)^T$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$.
(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die rechte Hälfte des Kreises mit dem Mittelpunkt $(3, -1)$ und dem Radius 2, wobei der Halbkreis im Uhrzeigersinn durchlaufen werden soll.
2. (a) Die Geschwindigkeit eines Massepunktes sei gegeben durch $\mathbf{v}(t) = (1, t, 3t^2)^T$ und seine Position zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 1)^T$. Bestimmen Sie die Bahn des Massepunktes.
(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Tangente an die Bahnkurve aus Aufgabe 2(a) zum Zeitpunkt $t = 2$.
3. Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ in Richtung $\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ an der Stelle $(1, 1)$. Skizzieren Sie die Höhengichtlinien, auf der $(1, 1)$ liegt und zeichne auch $\nabla f(1, 1)$ als kleinen Pfeil ein.
4. Sei f ein Skalarfeld gegeben durch $f(\mathbf{r}) = f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2 + x - 3y + 1$.
- (a) Berechnen Sie den Gradienten von f .
(b) Berechnen Sie die Tangentialebene für $\mathbf{r}_0 := (x_0, y_0) = (-1, 1)$.
(c) Berechnen Sie das totale Differential von $z = f(x, y)$.
(d) Berechnen Sie den Gradienten und das totale Differential an \mathbf{r}_0 , sowie

$$\mathbf{g} = \frac{1}{|\nabla f(\mathbf{r}_0)|} \nabla f(\mathbf{r}_0).$$

- (e) Berechnen Sie für $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3)$

$$\Delta z_1 = f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{g}) - f(\mathbf{r}_0), \quad \Delta z_2 = f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{w}) - f(\mathbf{r}_0).$$

5. Sei $h: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $h(t) = (\cos t)^{\sin t}$. Berechnen Sie die Ableitung h' auf zwei Arten:

- (a) Durch Differenzieren von h mit Hilfe der Ableitungsregeln.
- (b) Anwendung der Kettenregel auf $h = f \circ \mathbf{r}$ mit

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(x, y) = x^y.$$

Geben Sie geeignete Definitionsbereiche für \mathbf{r} und f an.

6. Gegeben sei die Kurve

$$C = \left\{ \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \sin(5t) \\ 3 \cos(5t) \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Berechnen Sie die Funktion der Bogenlänge $s = s(t)$ und die gesamte Bogenlänge L .

7. Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y) = (2x - y, x^2)^T$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes \mathbf{F} entlang der Kurve mit der Parameterdarstellung $\mathbf{r} = (t, 1 - \frac{3}{4}(t-1)^2)^T$, $1 \leq t \leq 3$.

8. Gegeben sei das Kurvenintegral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ -14yz \\ 20xz^2 \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (3x^2 + 6y) \, dx - 14yz \, dy + 20xz^2 \, dz.$$

- (a) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Kurve C mit der Parameterdarstellung $\mathbf{r} = (t, t^2, t^3)^T$, $0 \leq t \leq 1$.
- (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Strecke C von $(0, 0, 0)^T$ nach $(1, 1, 1)^T$.

Lösungen

1. (a) $|\mathbf{v}(1)| = \sqrt{41}$, (b) $\mathbf{r}(\varphi) = (3 + 2 \cos \varphi, -1 - 2 \sin \varphi)^T$
2. (a) $\mathbf{r}(t) = \left(t + 1, \frac{t^2}{2}, t^3 + 1\right)^T$, (b) $\mathbf{T}(t) = (1 + t, -2 + 2t, -15 + 12t)^T$.
3. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = -3\sqrt{2}$
4. (a) $\nabla f(\mathbf{r}) = (2x + y + 1, x - 6y - 3)^T$,
(b) $10y + z = 4$,
(c) $dz = (2x + y + 1) dx + (x - 6y - 3) dy$,
(d) $\nabla f(\mathbf{r}_0) = (0, -10)^T$, $dz = -10 dy$, $\mathbf{g} = (0, -1)^T$,
(e) $\Delta z_1 = 7$, $\Delta z_2 \approx 6,5858$
5. (a)+(b) $h'(t) = (\cos t)^{\sin t} \left(\cos t \ln(\cos t) - \frac{\sin^2 t}{\cos t} \right)$,
(b) $\mathbf{r}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
6. $s(t) = 15t$, $L = 30\pi$
7. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -9$
8. (a) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 5$,
(b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{13}{3}$