
Pflichtbeispiel: Gegeben sei ein Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2y^2 + 3xy$. Weiters sei das Dreieck D gegeben durch die Eckpunkte $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Bereichs B

$$B = D \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \le 0, y \ge 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

und das Integral

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

---

1. Ein Kreiszylinder ist gegeben mit $Z = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le R^2\}$. Der Zylinder bohrt aus der Kugel $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 4R^2\}$ einen Körper $K = Z \cap B$ aus.
   Berechnen Sie das Volumen von K.

2. Gegeben sei ein Bereich B, der von dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und der Ebene $z = 1$ begrenzt wird. Berechnen Sie

   $$I = \int_B \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}V.$$

3. Berechnen Sie das Integral

   $$I = \int_K e^{-z}\,\mathrm{d}V,$$

   mit $K = \{(x,y,z) : z \ge x^2 + y^2\}$.

4. Ein homogener Körper[1] wird durch die Ungleichungen

   $$0 \le z \le 1, \qquad x^2 + y^2 \le a^2(1-z)^2$$

   beschrieben. Bestimmen Sie seinen Schwerpunkt.

5. Berechnen Sie das Volumsintegral

   $$\int_K (x + y + z)\,\mathrm{d}V,$$

   wobei K der durch die Ungleichungen $x, y, z \ge 0$ und $x + y + z \le 1$ bestimmte Körper ist.

6. Berechnen Sie das Volumen V des Körpers G von $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 < 9$ den Zylinder $x^2 + y^2 \le 1$ ausschneidet. Der Körper G ist also gegeben durch

   $$G = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

[1] Ein homogener Körper ist charakterisiert durch eine über den Ort gleich bleibende Dichte.

7. Gegeben sei eine Vollkugel K um den Punkt $M = (0,0,0)^T$ mit dem Radius $R = 3$. Berechnen Sie das folgende Integral.

$$I = \int_K (x^2 + y^2 + z^2)^4 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

8. Sei E eine Ellipse definiert durch die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Berechnen Sie das folgende Integral auf zwei verschiedene Arten.

$$I = \int_E (x + y)^2 \,\mathrm{d}(x, y)$$

Lösungen

1. $V_K = 2\pi\left(\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}\right)R^3$
2. $I = \frac{4\pi}{15}$
3. $I = \pi$
4. $S = \left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$
5. $I = \frac{1}{8}$
6. $V = \frac{32\sqrt{8}}{3}\pi$
7. $I = \frac{708588}{11}\pi$
8. $I = \frac{ab}{4}\pi(a^2 + b^2)$.