Pflichtbeispiel: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0.$$

(a) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem $\{y_1(t), y_2(t)\}$ der gegebenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine reelle Partikulärlösung $y_p(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 6\mathrm{e}^{-t}.$$

(c) Bestimmen Sie die reelle Lösung $y(t)$ für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 6\mathrm{e}^{-t}, \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 4.$$

---

1. Berechnen Sie mit Hilfe eines Ansatzes eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - 2y(t) = 5\mathrm{e}^{t}.$$

2. Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - 2\,\dot{y}(t) + a\,y(t) = 0.$$

Geben Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die möglichen Lösungen der homogenen Differentialgleichung an. Betrachten Sie insbesondere die Lösung für $a = 0$.

3. Berechnen Sie die Lösung $y = y(t)$ des Anfangwertproblems

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6\,y = \cos t, \qquad y(0) = \dot{y}(0) = \tfrac{11}{10}.$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Lösung, d.h. skizzieren Sie die Lösung und bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

4. Lösen Sie das Randwertproblem

$$y'' - y = 1, \qquad y(0) = y'(1) = 0.$$

5. Berechnen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Untersuchen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

6. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \mathrm{e}^{t}$$

nach $y = y(t)$.

7. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 4x$ auf $[-\pi, \pi]$, die außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird. Die Funktion lässt sich durch eine klassische Fourierreihe $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ darstellen.

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k, mit $k \in \mathbb{N}$.

8. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = |\cos(x)|$, auf $[0, 2\pi]$, die außerhalb der Intervalls periodisch fortgesetzt wird. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k.

Lösungen

1. $C = \frac{5}{3},\ y_p(t) = \frac{5}{3}t\mathrm{e}^t$

2.
   - 1. Fall: $y_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^{(1-\sqrt{1-a})\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{(1+\sqrt{1-a})\,t}$
   - 2. Fall: $y_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,t\,\mathrm{e}^t$
   - 3. Fall:
     komplex: $y_h(t) = \mathrm{e}^t\left(c_1\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\sqrt{|1-a|})\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\sqrt{|1-a|})\,t}\right)$
     reell: $y_h(t) = \mathrm{e}^t\left(c_1\,\cos(\sqrt{|1-a|}\,t) + c_2\,\sin(\sqrt{|1-a|}\,t)\right)$
   - Fall $a = 0$: $y_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2$

3. $y(t) = 4\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t.$

4. $y(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2-x} - 1 - \mathrm{e}^2}{(1+\mathrm{e}^2)}$

5. $y(x) = c\sin(t)$

6. $y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t + \frac{t^2\mathrm{e}^t}{2}.$

7. $a_0 = 0,\ a_k = 0,\ b_k = -8\frac{(-1)^k}{k}$

8. $a_0 = \frac{2}{\pi}, a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ -\frac{4}{\pi(k^2-1)}(-1)^{\frac{k}{2}} & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}, b_k = 0$ für alle k