Pflichtbeispiel: Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$y\cos(x) + 2x\mathrm{e}^y + (\sin(x) + x^2\mathrm{e}^y - 1)y' = 0.$$

Prüfen Sie zuerst, ob diese Gleichung exakt ist. Berechnen Sie danach ein erstes Integral, also das zur exakten Differentialgleichung gehörende Potential Φ.

---

1. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

   $$2x\mathrm{e}^y - 1 + (x^2\mathrm{e}^y + 1)y' = 0.$$

   Prüfen Sie die Gleichung auf Exaktheit und lösen Sie das Anfangswertproblem $y(1) = 0$.

2. Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ und $y = y(x)$ die Differentialgleichung

   $$3x^2 - 2ax + ay - 3y^2y' + axy' = 0.$$

   (a) Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist.

   (b) Finden Sie ein Potential als erstes Integral.

   (c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ kann die Lösung $y = y(x)$ angegeben werden? Berechnen Sie diese.

3. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

   $$2x + 4y + 2 + (4x + 12y + 8)y' = 0.$$

   (a) Prüfen Sie, ob diese exakt ist.

   (b) Berechnen Sie ein erstes Integral, also das zur exakten Differentialgleichung gehörende Potential Φ.

   (c) Lösen Sie die Differentialgleichung für $y(0) = -1$.

4. Betrachten Sie die Differentialgleichung

   $$y(1 + xy) - xy' = 0.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

   (b) Bestimmen Sie einen geeigneten integrierenden Faktor $a = a(y)$.

   (c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor multipliziert nun exakt ist.

   (d) Bestimmen Sie ein erstes Integral $\Phi = \Phi(x, y)$.

   (e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung durch den Punkt $(x, y) = (2, -2)$.

5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(xy^2 + yx\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (2x^2y + x\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.
   (b) Bestimmen Sie einen geeigneten integrierenden Faktor $a = a(x)$.
   (c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor multipliziert nun exakt ist.
   (d) Bestimmen Sie ein erstes Integral $\Phi = \Phi(x, y)$.

6. Gegeben ist für $x = x(t)$ die Bernoulli-Differentialgleichung

$$\dot{x} + 5tx = 5tx^3.$$

   Berechnen Sie die allgemeine Lösung x der Differentialgleichung.

Lösungen

1. $x(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\left(1 + \sqrt{1 - 4y\mathrm{e}^{y}}\right)$
2. (a) exakt (b) $\Phi(x, y) = x^3 - ax^2 + axy + y^3$
3. $\Phi(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + c_0$, $y(t) = \frac{-2-x}{3} - \frac{\sqrt{-2x^2+4x+4}}{6}$
4. $y(x) = \frac{2x}{C-x^2}$; $C = 2$
5. $\Phi(x, y) = y^2x + y\mathrm{e}^{x} + C_0$
6. $x(t) = \left(\sqrt{c\,\mathrm{e}^{5t^2} + 1}\right)^{-1}$