Praktische Mathematik 1 für TPH **Übungsblatt 9** 12.12.2022

Pflichtbeispiel: Ein Fahrgast fährt jeden Tag mit der U-Bahn und stellt fest, dass es bei den dabei auftretenden Verspätungen eine Regelmäßigkeit zu geben scheint. Er vermutet, dass die Verspätung der U-Bahn (in Minuten) der Funktion f_X folgt, die wie folgt definiert ist.

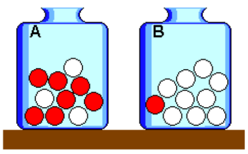
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{2}{25}x & 0 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X entspricht. Zeichnen Sie die Dichtefunktion f_X im Intervall $[-1, 6]$ und geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_X an.

---

1. Betrachten Sie zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$. Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind gegeben als
$$P(A) = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad P(B) = \frac{17}{30}.$$
Desweiteren ist die bedingte Wahrscheinlichkeit
$$P(A|B) = \frac{3}{5}$$
gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten
$$P(A^C) \qquad \text{und} \qquad P(B|A), \qquad \text{sowie} \qquad P(B|A^C).$$

2. Betrachten Sie das Beispiel zweier (unterscheidbarer) Urnen mit jeweils 10 Kugeln. In Urne A sind 3 weiße und 7 rote, in Urne B sind 9 weiße und 1 rote Kugel. Die Ereignisse sind definiert durch



Ereignis	Beschreibung
A	Kugel stammt aus Urne A
B	Kugel stammt aus Urne B
R	Kugel ist rot

und die Wahrscheinlichkeiten gegeben als
$$P(A) = P(B) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(R|A) = \tfrac{7}{10} \qquad \text{und} \qquad P(R|B) = \tfrac{1}{10}.$$

(a) Berechnen Sie
$$P(R), \qquad P(A|R) \quad \text{und} \quad P(R^C|A).$$

(b) Sind die Ereignisse A und R unabhängig? Begründen Sie die Antwort!

Bemerkung: Die gefragten Wahrscheinlichkeiten können durch Verwendung der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnet werden, ohne auf das Urnenexperiment einzugehen. Es ist aber sinnvoll die Berechnungen mit Hilfe eines Baumdiagramms für das Ziehen der Kugeln zu verifizieren.

3. Zeigen Sie: Sind A und B stochastisch unabhängig, dann sind auch A und B^C stochastisch unabhängig, ebenso B und A^C, sowie A^C und B^C.

4. Nehmen wir an, es wird mit zwei Würfeln geworfen und man betrachtet die Summe der Augenzahlen.

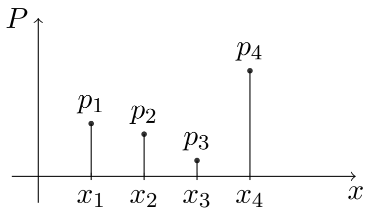
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme genau 10 beträgt?

   (b) Betrachten wir nur die Würfe mit Augensumme 10: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Würfel die gleiche Zahl zeigen?

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens 10 beträgt?

   (d) Betrachten wir alle überhaupt möglichen Würfe insgesamt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Augensumme von mindestens 10 mit einem Wurf, bei dem beide Würfel die gleiche Zahl zeigen, erreicht wird ?

5. Betrachten Sie die Funktion P in der Abbildung



   mit $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{5}$, $p_3 = c$, $p_4 = \frac{1}{2}$.

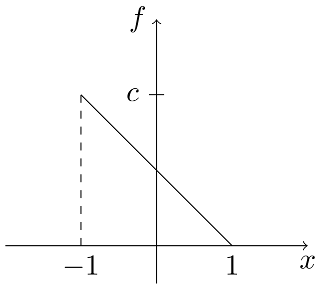
   (a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, sodass P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion über die diskrete Zufallsvariable X darstellt.

   (b) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ an und fertigen Sie eine Skizze an.

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der diskreten Zufallsvariable X für $x_i = i, i = 1, ..., 4$.

   (d) Berechnen Sie $P(X < x_2)$ sowie $P(X \leq x_2)$.

6. Sei X eine stetige Zufallsvariable. Betrachten Sie die Funktion f, dargestellt in der folgenden Abbildung.



   (a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, sodass f eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.

   (b) Geben Sie die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariable X an und fertigen Sie eine Skizze an.

   (c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(2X - 3)$.

   (d) Berechnen Sie $P(0 \leq X < \frac{1}{2})$.

Lösung.

1. $P(A^C) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{51}{100}$, $P(B|A^C) = \frac{17}{25}$
2. (a) $P(R) = \frac{2}{5}$, $P(A|R) = \frac{7}{8}$, $P(R^C|A) = \frac{3}{10}$
3. Nachrechnen!
4. (a) $\frac{1}{12}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{6}$, (d) $\frac{1}{18}$
5. (a) $c = \frac{1}{20}$, (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1, \\ \frac{1}{4} & x_1 \leq x < x_2, \\ \frac{9}{20} & x_2 \leq x < x_3,, \\ \frac{1}{2} & x_3 \leq x < x_4, \\ 1 & x \geq x_4 \end{cases}$

   (c) $\mathbb{E}(X) = \frac{14}{5}$, (d) $P(X < x_2) = \frac{1}{4}$, $P(X \leq x_2) = \frac{9}{20}$
6. (a) $c = 1$, (b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}, & -1 \leq x \leq 1,, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

   (c) $\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{3}, \mathbb{E}(2X-3) = -\frac{11}{3}$, (d) $P(0 \leq X < \frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$