Praktische Mathematik 1 für TPH **1. Klausur** 27.10.2023

Gruppe A

1. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(\cos(1-x))$. Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 1$.

Lösung.
Das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 1$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \end{aligned}$$

Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{\cos(1-x)}, \\ f'(x) &= \sin(1-x)\mathrm{e}^{\cos(1-x)}, \\ f''(x) &= -\cos(1-x)\mathrm{e}^{\cos(1-x)} + \sin(1-x)^2\mathrm{e}^{\cos(1-x)}. \end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt somit

$$\begin{aligned} f(1) &= \mathrm{e}^{\cos(0)} = \mathrm{e}, \\ f'(1) &= \sin(0)\mathrm{e}^{\cos(0)} = 0, \\ f''(1) &= -\cos(0)\mathrm{e}^{\cos(0)} + \sin(0)^2\mathrm{e}^{\cos(0)} = -\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Damit berechnet sich das Taylor-Polynom als

$$T_2(x) = \mathrm{e} - \frac{1}{2}\mathrm{e}(x-1)^2.$$

2. Gegeben sei $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f mit zwei unterschiedlichen Lösungswegen. Verwenden Sie einmal eine spezielle Substitution.

Lösung.

Lösungsweg 1

$$\int x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} u = 1+x^2 \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int x\sqrt{u}\,\frac{1}{2x}\ \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Lösungsweg 2

$$\int x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x = \sinh(t) \\ \mathrm{d}x = \cosh(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \sinh(t)\sqrt{1+\sinh^2(t)}\,\cosh(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int \sinh(t)\cosh^2(t)\ \mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} u = \cosh(t) \\ \mathrm{d}u = \sinh(t)\mathrm{d}t \end{array}\right|$$

$$= \int u^2\ \mathrm{d}u\ = \frac{u^3}{3} + C\ = \frac{\cosh^3(t)}{3} + C$$

$$= \frac{\cosh^3(\operatorname{arsinh}(x))}{3} + C$$

3. Gegeben sei eine Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t - 1 \\ \frac{1}{2}t + 10 \end{pmatrix} : t \in [-1, 0] \right\},$$

sowie ein Skalarfeld

$$f(x, y) = y^2 \cos y + \mathrm{e}^x + x \sin y,$$

(a) Berechnen Sie die Tangentialebene $z = T(x, y)$ an das Skalarfeld f im Punkt $(x_0, y_0) = (5, 2\pi)$.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ und Länge der Kurve L.

Lösung.

(a) Die Tangentialebene an f im Punkt $\boldsymbol{r}_0$ ist gegeben durch

$$z = T(r) = T(x, y) = f(\boldsymbol{r}_0) + \nabla f(\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0).$$

Um diese zu bestimmen muss zuerst der Gradient von f berechnet werden

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y^2 \cos(y) + \mathrm{e}^x + x \sin(y), \\ \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + \sin(y) \\ 2y \cos(y) - y^2 \sin(y) + x \cos(y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Einsetzen von $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0) = (5, 2\pi)$ ergibt

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r}_0) &= f(5, 2\pi) = (2\pi)^2 \cos(2\pi) + \mathrm{e}^5 + 5 \sin(2\pi) \\ &= 4\pi^2 + \mathrm{e}^5 \\ \nabla f(\boldsymbol{r}_0) &= \nabla f(5, 2\pi) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 + \sin(2\pi) \\ 2(2\pi)\cos(2\pi) - (2\pi)^2 \sin(2\pi) + 5\cos(2\pi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 \\ 4\pi + 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun kann die Tangentialebene bestimmt werden

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{r}) &= f(\boldsymbol{r}_0) + \nabla f(\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \\ &= 4\pi^2 + \mathrm{e}^5 + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^5 \\ 4\pi + 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 2\pi \end{pmatrix} \\ &= 4\pi^2 + \mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^5(x - 5) + (4\pi + 5)(y - 2\pi) \\ &= 4\pi^2 + \mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^5 x - 5\mathrm{e}^5 + 4\pi y + 5y - 8\pi^2 - 10\pi \\ &= x\mathrm{e}^5 + y(4\pi + 5) - 4\pi^2 - 4\mathrm{e}^5 - 10\pi \end{aligned}$$

(b) Die Bogenlänge $s(t)$ einer Kurve $C = \{\boldsymbol{r}(t) : t \in [a,b]\}$ ist gegeben durch

$$s(t) = \int_a^t \mathrm{d}s = \int_a^t |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau,$$

die Länge L durch

$$L = \int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau.$$

Zuerst muss $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|$ bestimmt werden

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t - 1 \\ \frac{1}{2}t + 10 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 0],$$

$$\dot{\boldsymbol{r}(t)} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Damit gilt nun

$$s(t) = \int_{-1}^t \frac{\sqrt{37}}{2} \, \mathrm{d}\tau = \frac{\sqrt{37}}{2}(t+1),$$

$$L = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{37}}{2} \, \mathrm{d}\tau = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

4. Betrachten Sie das wirbelfreie Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ \frac{x}{y} - z\cos(yz) \\ -y\cos(yz) \end{pmatrix},$$

sowie das dazugehörige Potential

$$\Phi(x,y,z) = x\ln(xy) + C(y,z),$$

mit einer noch unbekannten Funktion $C = C(y,z)$.

(a) Bestimmen Sie sowohl die fehlende Komponente $f_1(x,y,z)$ als auch das Potential Φ.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes f entlang der Strecke von $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$ nach $(6,5,-1)^{\mathrm{T}}$.

Lösung.

(a) Um die fehlende Komponente f_1 und die unbekannte Funktion C zu bestimmen, verwenden wir, dass $\boldsymbol{f} = \nabla\Phi$.

$$\boldsymbol{f} = \nabla\Phi = \begin{pmatrix} \ln(xy) + xy\frac{1}{xy} \\ x^2\frac{1}{xy} + \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(xy) + 1 \\ \frac{x}{y} + \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$f_1(x,y,z) = \ln(xy) + 1$$
$$\frac{\partial C}{\partial y} = -z\cos(yz), \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -y\cos(yz).$$

und wir erhalten insgesamt

$$f_1(x,y,z) = \ln(xy) + 1,$$
$$C(y,z) = -\sin(yz) + C_0.$$

(b) Das Kurvenintegral von $\boldsymbol{f}$ entlang der Strecke mit Anfangspunkt $a = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$ und Endpunkt $b = (6, 5, -1)^{\mathrm{T}}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \Phi(\boldsymbol{r}(b)) - \Phi(\boldsymbol{r}(a)), \\
&= \Phi(6, 5, -1) - \Phi(1, 2, 0), \\
&= 6\ln(30) - \sin(-5) - \ln(2) + \sin(0), \\
&= 6\ln(30) - \sin(-5) - \ln(2).
\end{aligned}$$