

1. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(\cosh(1-x))$. Berechnen Sie das Taylor-Polynom
2. Grades an der Stelle $x_0 = 1$.

Lösung.

Das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 1$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x - 1)^k \\ &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2} f''(1)(x - 1)^2 \end{aligned}$$

Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\cosh(1-x)), \\ f'(x) &= \frac{-\sinh(1-x)}{\cosh(1-x)} = -\tanh(1-x), \\ f''(x) &= \frac{1}{\cosh(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt somit

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln(\cosh(0)) = \ln(1) = 0, \\ f'(1) &= -\tanh(0) = 0, \\ f''(1) &= \frac{1}{\cosh(0)^2} = 1. \end{aligned}$$

Damit berechnet sich das Taylor-Polynom als

$$T_2(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

2. Gegeben sei $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f mit zwei unterschiedlichen Lösungswegen. Verwenden Sie einmal eine spezielle Substitution.

Lösung.

Lösungsweg 1

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x^2} \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x \, dx \end{array} \right| = \int x\sqrt{u} \frac{1}{(-2x)} \, du \\ &= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + C \\ &= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Lösungsweg 2

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x^2} \, dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin(t) \\ dx = \cos(t) \, dt \end{array} \right| = \int \sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) \, dt \\ &= \int \sin(t) \cos^2(t) \, dt = \left| \begin{array}{l} u = \cos(t) \\ du = -\sin(t) \, dt \end{array} \right| \\ &= -\int u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3(t)}{3} + C \\ &= -\frac{\cos^3(\arcsin(x))}{3} + C\end{aligned}$$

3. Gegeben sei eine Kurve

$$C = \left\{ \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t - 5 \\ 3 + \frac{1}{5}t \end{pmatrix} : t \in [-1, 0] \right\},$$

sowie ein Skalarfeld

$$f(x, y) = x^2 \cos x + e^y + y \sin x,$$

- (a) Berechnen Sie die Tangentialebene $z = T(x, y)$ an das Skalarfeld f im Punkt $(x_0, y_0) = (2\pi, 5)$.
 (b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ und Länge der Kurve L .

Lösung.

- (a) Die Tangentialebene an f im Punkt \mathbf{r}_0 ist gegeben durch

$$z = T(\mathbf{r}) = T(x, y) = f(\mathbf{r}_0) + \nabla f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Um diese zu bestimmen muss zuerst der Gradient von f berechnet werden

$$f(x, y) = x^2 \cos(x) + e^y + y \sin(x),$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \cos(x) - x^2 \sin(x) + y \cos(x) \\ e^y + \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) = (2\pi, 5)$ ergibt

$$f(\mathbf{r}_0) = f(2\pi, 5) = (2\pi)^2 \cos(2\pi) + e^5 + 5 \sin(2\pi)$$

$$= 4\pi^2 + e^5$$

$$\nabla f(\mathbf{r}_0) = \nabla f(2\pi, 5) = \begin{pmatrix} 2(2\pi) \cos(2\pi) - (2\pi)^2 \sin(2\pi) + 5 \cos(2\pi) \\ e^5 + \sin(2\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\pi + 5 \\ e^5 \end{pmatrix}$$

Nun kann die Tangentialebene bestimmt werden

$$T(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \nabla f(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$= 4\pi^2 + e^5 + \begin{pmatrix} 4\pi + 5 \\ e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2\pi \\ y - 5 \end{pmatrix}$$

$$= 4\pi^2 + e^5 + (4\pi - 5)(x - 2\pi) + e^5(y - 5)$$

$$= 4\pi^2 + e^5 + 4\pi x - 8\pi^2 + 5x - 10\pi + e^5 y - 5e^5$$

$$= x(4\pi + 5) + ye^5 - 4\pi^2 - 4e^5 - 10\pi$$

(b) Die Bogenlänge $s(t)$ einer Kurve $C = \{\mathbf{r}(t) : t \in [a, b]\}$ ist gegeben durch

$$s(t) = \int_a^t ds = \int_a^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau,$$

die Länge L durch

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau.$$

Zuerst muss $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ bestimmt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} 2t - 5 \\ \frac{1}{5}t + 3 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 0], \\ \mathbf{r}'(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow |\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{101}{25}} = \frac{\sqrt{101}}{5}. \end{aligned}$$

Damit gilt nun

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-1}^t \frac{\sqrt{101}}{5} d\tau = \frac{\sqrt{101}}{5}(t + 1), \\ L &= \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{101}}{5} d\tau = \frac{\sqrt{101}}{5}. \end{aligned}$$

4. Betrachten Sie das wirbelfreie Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \ln(xy) + 1 \\ \frac{x}{y} - z \cos(yz) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix},$$

sowie das dazugehörige Potential

$$\Phi(x, y, z) = -\sin(yz) + C(x, y),$$

mit einer noch unbekanntem Funktion $C = C(x, y)$.

- (a) Bestimmen Sie sowohl die fehlende Komponente $f_3(x, y, z)$ als auch das Potential Φ .
- (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes f entlang der Strecke von $(1, 4, -1)^T$ nach $(3, 8, 0)^T$.

Lösung.

- (a) Um die fehlende Komponente f_3 und die unbekanntem Funktion C zu bestimmen, verwenden wir, dass $\mathbf{f} = \nabla\Phi$.

$$\mathbf{f} = \nabla\Phi = \begin{pmatrix} \ln(xy) + xy \frac{1}{xy} \\ x^2 \frac{1}{xy} + \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ -z \cos(yz) + \frac{\partial C}{\partial y} \\ -y \cos(yz) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f_3(x, y, z) &= -y \cos(yz) \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= \ln(xy) + 1, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

und wir erhalten insgesamt

$$f_3(x, y, z) = -y \cos(yz),$$

$$C(x, y) = x \ln(xy) + C_0.$$

- (b) Das Kurvenintegral von \mathbf{f} entlang der Strecke mit Anfangspunkt $a = (1, 4, -1)^T$ und Endpunkt $b = (3, 8, 0)^T$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{f} \, d\mathbf{r} &= \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a)), \\ &= \Phi(3, 8, 0) - \Phi(1, 4, -1), \\ &= 3 \ln(24) - \sin(0) - \ln(4) + \sin(-4), \\ &= 3 \ln(24) - \ln(4) + \sin(-4).\end{aligned}$$