Praktische Mathematik 1 für TPH **2. Klausur** 24.11.2023
**Gruppe A**

1. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y,z) = 3z\sqrt{x^2+y^2}$ gegeben. Weiters sei eine Halbkugel $B$ mit dem Mittelpunkt $M = (0,0,0)$ und Radius $r = 5$ für $z \geq 0$ gegeben. Berechnen Sie das Volumsintegral

$$\int_B f \,\mathrm{d}V.$$

**Lösung.**
Zuerst beschreiben wir die Halbkugel $B$ mittels Kugelkoordinaten als

$$B = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 5,\ 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Die Funktion $f(x,y,z) = 3z\sqrt{x^2+y^2}$ benötigen wir ebenfalls in Kugelkoordinaten. Dazu bestimmen wir

$$z = r\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{\big(r\sin(\theta)\cos(\varphi)\big)^2 + \big(r\sin(\theta)\sin(\varphi)\big)^2} \\
&= \sqrt{r^2\sin^2(\theta)\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)} \\
&= r\sin(\theta).
\end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt

$$f(r,\theta,\varphi) = 3r\cos(\theta)r\sin(\theta) = 3r^2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

Mit $\det J = r^2\sin(\theta)$ ergibt sich das gesuchte Integral damit als

$$\begin{aligned}
\int_B f\ \mathrm{d}V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^5\int_0^{2\pi} 3r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\,r^2\sin(\theta)\ \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^5 2\pi\,3r^4\sin^2(\theta)\cos(\theta)\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\,3\cdot 5^4\sin^2(\theta)\cos(\theta)\ \mathrm{d}\theta \\
&= \left|\begin{array}{c} u = \sin(\theta) \\ \mathrm{d}u = \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \end{array}\right| = 2\pi\,3\cdot 5^4\int u^2\mathrm{d}u \\
&= 2\pi\,3\cdot 5^4\,\frac{u^3}{3}\Big| = 2\pi\,3\cdot 5^4\,\frac{\sin(\theta)^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\pi\cdot 5^4.
\end{aligned}$$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 9y = 2\sin(3t).$$

(a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie für die inhomogene Differentialgleichung eine partikuläre Lösung mittels Ansatz.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 4, \quad \dot{y}(0) = \frac{17}{3}.$$

**Lösung.**

(a) Wir bestimmen zuerst das charakteristische Polynom der Differentialgleichung sowie die zugehörigen Nullstellen

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9, \quad \lambda_{1,2} = \pm 3\mathrm{i}.$$

Aufgrund der komplexen Nullstellen erhalten wir eine komplexe Lösung

$$y_h(t) = c_1 \mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + c_2 \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}.$$

Die reelle Darstellung der Lösung lautet

$$y_h(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t).$$

Damit können wir das reelle Fundamentalsystem bestimmen als

$$\{y_1, y_2\} = \{\sin(3t), \cos(3t)\}.$$

(b) Für die Partikulärlösung muss zunächst der richtige Ansatz ausgewählt werden. In diesem Beispiel betrachten wir die Inhomogenität

$$b(t) = 2\sin(3t).$$

Diese ist linear abhängig zur homogenen Lösung der Differentialgleichung, daher wählen wir den Ansatz

$$y_p(t) = At\sin(3t) + Bt\cos(3t).$$

Die erste und zweite Ableitung davon sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\dot{y}_p(t) &= A\sin(3t) + 3At\cos(3t) + B\cos(3t) - 3B\sin(3t) \\
\ddot{y}_p(t) &= 3A\cos(3t) + 3A\cos(3t) - 9At\sin(3t) - 3B\sin(3t) - 3B\sin(3t) - 9Bt\cos(3t) \\
&= 6A\cos(3t) - 9At\sin(3t) - 6B\sin(3t) - 9Bt\cos(3t)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\ddot{y}_p(t) + 9y_p(t) \\
&= 6A\cos(3t) - 9At\sin(3t) - 6B\sin(3t) - 9Bt\cos(3t) + 9At\sin(3t) + 9Bt\cos(3t), \\
&= 6A\cos(3t) - 6B\sin(3t).
\end{aligned}$$

Gleichsetzen mit der Inhomogenität und ein Koeffizientenvergleich liefert uns schließlich die partikuläre Lösung.

$$6A\cos(3t) - 6B\sin(3t) = 2\sin(3t)$$

$$A = 0, B = \frac{1}{3}$$

$$y_p(t) = -\frac{1}{3}t\cos(3t)$$

Insgesamt lautet die Lösung der Differentialgleichung also

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\
&= c_1\sin(3t) + c_2\cos(3t) - \frac{1}{3}t\cos(3t).
\end{aligned}$$

(c) Im letzten Schritt betrachten wir noch das Anfangswertproblem mit den beiden Anfangswerten

$$y(0) = 4,\ \dot{y}(0) = \frac{17}{3}.$$

Damit können wir nun die beiden Konstanten $c_1, c_2$ bestimmen. Wir betrachten dazu die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1\sin(3t) + c_2\cos(3t) - \frac{1}{3}t\cos(3t).$$

Auswerten an der Stelle $t = 0$ liefert uns die erste Konstante

$$y(0) = c_2 \stackrel{!}{=} 4 \quad \Rightarrow c_2 = 4.$$

Für den zweiten Wert benötigen wir die Ableitung der allgemeinen Lösung

$$\dot{y}(t) = 3c_1\cos(3t) - 3c_2\sin(3t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + t\sin(3t),$$

$$\dot{y}(0) = 3c_1 - \frac{1}{3} \stackrel{!}{=} \frac{17}{3} \quad \Rightarrow 3c_1 = \frac{18}{3},\ c_1 = 2.$$

Insgaesamt erhalten wir

$$y(t) = 2\sin(3t) + 4\cos(3t) - \frac{1}{3}t\cos(3t).$$

3. Betrachten Sie die Funktion $f$ auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \pi, \\ -x + \frac{3\pi}{2}, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f$ auf $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) Berechnen Sie für die Fourier-Approximation

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die Fourierkoeffizienten $a_0, a_k$ und $b_k$.

**Lösung.**

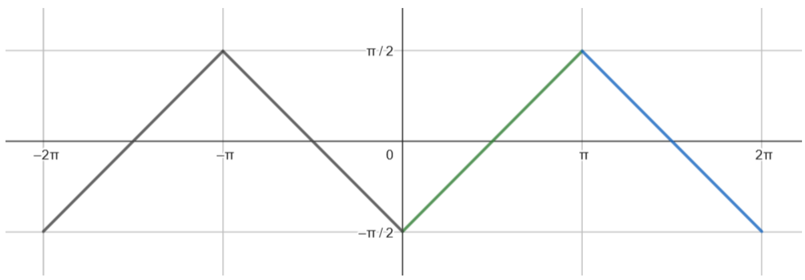


Abbildung 1: Skizze der Funktion $f$ auf $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) Wir betrachten zunächst die Skizze aus Unterpunkt (a) und erkennen, dass $f$ eine gerade Funktion ist. Damit verschwinden alle Koeffizienten $b_k$ und wir müssen nur noch die Berechnung der Koeffizienten $a_k$ durchführen.

Ebenfalls anhand der Skizze erkennen wir den Wert von $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Die restlichen Koeffizienten berechnen sich durch

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \Bigg[ \underbrace{\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(kx) \, \mathrm{d}x}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) \cos(kx) \, \mathrm{d}x}_{\mathrm{II}} \Bigg]. \end{aligned}$$

Integral I

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(kx)\ \mathrm{d}x\\
&=\int_0^\pi x\cos(kx)\ \mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos(kx)\ \mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{k}x\sin(kx)\Big|_0^\pi-\frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kx)\ \mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_0^\pi\\
&=0+\frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_0^\pi+0\\
&=\frac{1}{k^2}(\cos(k\pi)-1)\\
&=\frac{1}{k^2}\left((-1)^k-1\right)
\end{aligned}
$$

Integral II

$$
\begin{aligned}
&\int_\pi^{2\pi} \left(-x+\frac{3\pi}{2}\right)\cos(kx)\ \mathrm{d}x\\
&=-\int_\pi^{2\pi} x\cos(kx)\ \mathrm{d}x+\frac{3\pi}{2}\int_\pi^{2\pi} \cos(kx)\ \mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{k}x\sin(kx)\Big|_\pi^{2\pi}+\frac{1}{k}\int_\pi^{2\pi} \sin(kx)\ \mathrm{d}x+\frac{3\pi}{2}\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_\pi^{2\pi}\\
&=0-\frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_\pi^{2\pi}+0\\
&=-\frac{1}{k^2}\cos(k2\pi)-\frac{1}{k^2}\cos(k\pi)\\
&=-\frac{1}{k^2}\left(1-(-1)^k\right)
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir für die Koeffizienten $a_k$

$$
\begin{aligned}
a_k&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\left((-1)^k-1\right)-\frac{1}{k^2}\left(1-(-1)^k\right)\right]\\
&=\frac{1}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1-1+(-1)^k\right]\\
&=\frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k-1\right).
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis lässt sich noch weiter vereinfachen zu

$$
a_k=\begin{cases}0, & k \text{ gerade}\\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade}\end{cases}
$$