

1. Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y, z) = 5z\sqrt{x^2 + y^2}$ gegeben. Weiters sei eine Halbkugel B mit dem Mittelpunkt $M = (0, 0, 0)$ und Radius $r = 3$ für $z \geq 0$ gegeben. Berechnen Sie das Volumsintegral

$$\int_B f \, dV.$$

Lösung.

Zuerst beschreiben wir die Halbkugel B mittels Kugelkoordinaten als

$$B = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Die Funktion $f(x, y, z) = 5z\sqrt{x^2 + y^2}$ benötigen wir ebenfalls in Kugelkoordinaten. Dazu bestimmen wir

$$z = r \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{(r \sin(\theta) \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\theta) \sin(\varphi))^2} \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))} \\ &= r \sin(\theta). \end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt

$$f(r, \theta, \varphi) = 5r \cos(\theta) r \sin(\theta) = 5r^2 \cos(\theta) \sin(\theta).$$

Mit $\det J = r^2 \sin(\theta)$ ergibt sich das gesuchte Integral damit als

$$\begin{aligned} \int_B f \, dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_0^{2\pi} 5r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) r^2 \sin(\theta) \, d\varphi \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 2\pi 5r^4 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi 3^5 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \left| \frac{u = \sin(\theta)}{du = \cos(\theta) d\theta} \right| = 2\pi 3^5 \int u^2 du \\ &= 2\pi 3^5 \frac{u^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi 3^5 \frac{\sin(\theta)^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \cdot 3^4. \end{aligned}$$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 16y = -4\cos(4t).$$

- (a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie für die inhomogene Differentialgleichung eine partikuläre Lösung mittels Ansatz.
- (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = 16.$$

Lösung.

- (a) Wir bestimmen zuerst das charakteristische Polynom der Differentialgleichung sowie die zugehörigen Nullstellen

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 16, \quad \lambda_{1,2} = \pm 4i.$$

Aufgrund der komplexen Nullstellen erhalten wir eine komplexe Lösung

$$y_h(t) = c_1 e^{4it} + c_2 e^{-4it}.$$

Die reelle Darstellung der Lösung lautet

$$y_h(t) = c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t).$$

Damit können wir das reelle Fundamentalsystem bestimmen als

$$\{y_1, y_2\} = \{\sin(4t), \cos(4t)\}.$$

- (b) Für die Partikulärlösung muss zunächst der richtige Ansatz ausgewählt werden. In diesem Beispiel betrachten wir die Inhomogenität

$$b(t) = -4\cos(4t).$$

Diese ist linear abhängig zur homogenen Lösung der Differentialgleichung, daher wählen wir den Ansatz

$$y_p(t) = At \sin(4t) + Bt \cos(4t).$$

Die erste und zweite Ableitung davon sind gegeben durch

$$\dot{y}_p(t) = A \sin(4t) + 4At \cos(4t) + B \cos(4t) - 4B \sin(4t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_p(t) &= 4A \cos(4t) + 4A \cos(4t) - 16At \sin(4t) - 4B \sin(4t) - 4B \sin(4t) - 16Bt \cos(4t) \\ &= 8A \cos(4t) - 16At \sin(4t) - 8B \sin(4t) - 16Bt \cos(4t) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} & \ddot{y}_p(t) + 16y_p(t) \\ &= 8A \cos(4t) - 16At \sin(4t) - 8B \sin(4t) - 16Bt \cos(4t) + 16At \sin(4t) + 16Bt \cos(4t), \\ &= 8A \cos(4t) - 8B \sin(4t). \end{aligned}$$

Gleichsetzen mit der Inhomogenität und ein Koeffizientenvergleich liefert uns schließlich die partikuläre Lösung.

$$8A \cos(4t) - 4B \sin(4t) = -4 \cos(4t)$$

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0$$

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}t \sin(4t)$$

Insgesamt lautet die Lösung der Differentialgleichung also

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t) - \frac{1}{2}t \sin(4t). \end{aligned}$$

- (c) Im letzten Schritt betrachten wir noch das Anfangswertproblem mit den beiden Anfangswerten

$$y(0) = 5, \dot{y}(0) = 16.$$

Damit können wir nun die beiden Konstanten c_1, c_2 bestimmen. Wir betrachten dazu die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t) - \frac{1}{2}t \sin(4t).$$

Auswerten an der Stelle $t = 0$ liefert uns die erste Konstante

$$y(0) = c_2 \stackrel{!}{=} 5 \quad \Rightarrow c_2 = 5.$$

Für den zweiten Wert benötigen wir die Ableitung der allgemeinen Lösung

$$\dot{y}(t) = 4c_1 \cos(4t) - 4c_2 \sin(4t) - \frac{1}{2} \sin(4t) - 2t \cos(4t),$$

$$\dot{y}(0) = 4c_1 \stackrel{!}{=} 16 \quad \Rightarrow c_1 = 4.$$

Insgesamt erhalten wir

$$y(t) = 4 \sin(4t) + 5 \cos(4t) - \frac{1}{2}t \sin(4t).$$

3. Betrachten Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \pi, \\ x - \frac{3\pi}{2}, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

- (a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[-2\pi, 2\pi)$.
- (b) Berechnen Sie für die Fourier-Approximation

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die Fourierkoeffizienten a_0, a_k und b_k .

Lösung.

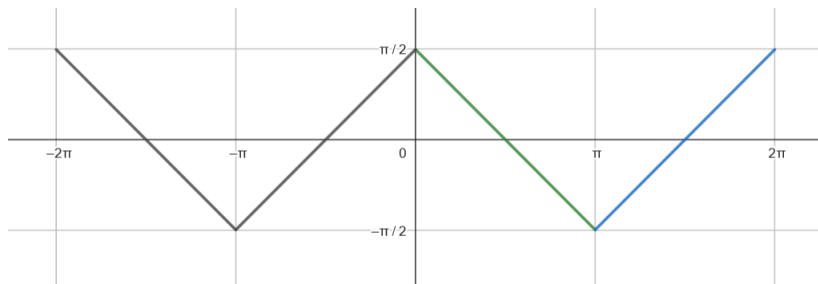


Abbildung 1: Skizze der Funktion f auf $[-2\pi, 2\pi)$.

- (b) Wir betrachten zunächst die Skizze aus Unterpunkt (a) und erkennen, dass f eine gerade Funktion ist. Damit verschwinden alle Koeffizienten b_k und wir müssen nur noch die Berechnung der Koeffizienten a_k durchführen.

Ebenfalls anhand der Skizze erkennen wir den Wert von a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 0.$$

Die restlichen Koeffizienten berechnen sich durch

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\int_0^{\pi} \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(kx) \, dx}_I + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cos(kx) \, dx}_{II} \right]. \end{aligned}$$

Integral I

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(kx) \, dx \\
 &= - \int_0^\pi x \cos(kx) \, dx + \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos(kx) \, dx \\
 &= - \frac{1}{k} x \sin(kx) \Big|_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kx) \, dx + \frac{\pi}{2} \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^\pi \\
 &= 0 - \frac{1}{k^2} \cos(kx) \Big|_0^\pi + 0 \\
 &= - \frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) + 1) \\
 &= \frac{1}{k^2} (1 - (-1)^k)
 \end{aligned}$$

Integral II

$$\begin{aligned}
 & \int_\pi^{2\pi} \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cos(kx) \, dx \\
 &= \int_\pi^{2\pi} x \cos(kx) \, dx - \frac{3\pi}{2} \int_\pi^{2\pi} \cos(kx) \, dx \\
 &= \frac{1}{k} x \sin(kx) \Big|_\pi^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_\pi^{2\pi} \sin(kx) \, dx - \frac{3\pi}{2} \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_\pi^{2\pi} \\
 &= 0 + \frac{1}{k^2} \cos(kx) \Big|_\pi^{2\pi} - 0 \\
 &= \frac{1}{k^2} \cos(k2\pi) - \frac{1}{k^2} \cos(k\pi) \\
 &= \frac{1}{k^2} (1 - (-1)^k)
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für die Koeffizienten a_k

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k^2} (1 - (-1)^k) + \frac{1}{k^2} (1 - (-1)^k) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi k^2} [1 - (-1)^k + 1 - (-1)^k] \\
 &= \frac{2}{\pi k^2} (1 - (-1)^k).
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis lässt sich noch weiter vereinfachen zu

$$a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$