
Pflichtbeispiel: Gegeben sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy^3 + 12x^3 \\ 6x^2y^2 + 15y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie, ob $\boldsymbol{f}$ ein Gradientenfeld darstellt.

(b) Berechnen Sie das Potential Φ, sodass $\boldsymbol{f} = \nabla\Phi$ gilt.

---

1. Gegeben sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x,y) = (2x - y, x^2)^{\mathrm{T}}$.
   (a) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ entlang der Strecke von $(1,1)^{\mathrm{T}}$ nach $(3,-2)^{\mathrm{T}}$.

   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ entlang der Kurve mit der Parameterdarstellung $\boldsymbol{r}(t) = \left(t, 1 - \frac{3}{4}(t-1)^2\right)^{\mathrm{T}}$, $1 \le t \le 3$.

2. Gegeben sei das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ -14yz \\ 20xz^2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \left(3x^2 + 6y\right)\,\mathrm{d}x - 14yz\,\mathrm{d}y + 20xz^2\,\mathrm{d}z.$$

   (a) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Kurve C mit der Parameterdarstellung $\boldsymbol{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)^{\mathrm{T}}$, $0 \le t \le 1$.

   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Strecke C von $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ nach $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

3. Bestimmen Sie das Potential Φ zu dem Gradientenfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \nabla\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^3y^3 + y^2\cos(x) + \mathrm{e}^x\cos(y) + \frac{1}{x} \\ 2y\sin(x) + 18x^4y^2 + 1 - \mathrm{e}^x\sin(y) \end{pmatrix}.$$

4. Untersuchen Sie, ob die Vektorfelder

$$\boldsymbol{F_1}(x,y) = \left(2x - y, x^2\right)^{\mathrm{T}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F_2}(x,y,z) = (yz, xz, xy)^{\mathrm{T}}$$

   Gradientenfelder sind und berechnen Sie gegebenenfalls das Potential.

5. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)^{\mathrm{T}}$ entlang der Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, t \in [0,\pi] \right\}.$$

6. Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ entlang des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,$(3,4,5)^{\mathrm{T}}$,$(2,-2,-1)^{\mathrm{T}}$, wobei die Eckpunkte in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden.

7. Gegeben ist ein Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x^5z^5 + 7x^6y^2 + 6x^5 \\ 2x^7y + 3y^2z^2 + 2y \\ 5x^6z^4 + 2y^3z + 2z \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaften muss das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ haben, damit ein Potential Φ mit Gradientenfeld $\boldsymbol{f}$ existiert? Bestimmen Sie das Potential Φ zu dem Gradientenfeld $\boldsymbol{f}$.

Lösungen

1. (a) $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -4$, (b) $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -9$
2. (a) $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 5$, (b) $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{13}{3}$
3. $\Phi(x, y) = \sin(x)y^2 + 6x^4y^3 + \mathrm{e}^x \cos(y) + \ln|x| + y + c$
4. $\boldsymbol{F_1}$ ist kein Gradientenfeld, $\Phi_2(x, y, z) = xyz + c$
5. $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$
6. $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$
7. Das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ ist stetig, stetig differenzierbar und wirbelfrei.
   $\Phi(x, y, z) = x^6z^5 + x^7y^2 + x^6 + y^3z^2 + y^2 + z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$