Pflichtbeispiel: Gegeben sei die Bernoulli-Differentialgleichung

$$\dot{y} = 5y + \mathrm{e}^{-2t}y^{-2}.$$

Wählen Sie die geeignete Substitution, um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zu erhalten. Diese ist *nicht* zu lösen!

---

1. Gegeben ist für $x = x(t)$ die Bernoulli-Differentialgleichung

$$\dot{x} + 5tx = 5tx^3.$$

   Berechnen Sie die allgemeine Lösung x der Differentialgleichung.

2. Gegeben ist für $y = y(t)$ die Bernoulli-Differentialgleichung

$$2\dot{y} = 6y - 4y^4.$$

   Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung.

3. Gegeben sei die Ricatti-Differentialgleichung

$$y' = 2x^2 - x + 1 + (1 - 4x)y + 2y^2.$$

   Eine Lösung dieser ist bereits gegeben als $y_p = y_p(x) = x$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$.

4. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   mit $x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ und den Anfangswerten $x(0) = (1, 5)^{\mathrm{T}}$.

5. Gegeben sei die DGL

$$t^2\ddot{y} - \cos t\dot{y} + 2y = 2\mathrm{e}^t.$$

   Schreiben Sie diese DGL in ein System der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ um.

6. Bestimmen Sie die Lösung des zweidimensionalen linearen System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

   mit $x(0) = (7, 5)^{\mathrm{T}}$. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ kann zerlegt werden zu $A = XDX^{-1}$ mit

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Gegeben sei die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} = 2\mathrm{e}^{3t}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung x_h der entsprechenden homogenen Differentialgleichung mit dem Ansatz $x_h = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Die homogene Lösung x_h ist eine Linearkombination von drei Fundamentallösungen.

(b) Verwenden Sie weiters zur Berechnung einer Partikulärlösung einen geeigneten Ansatz. Geben Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung an.

(c) Setzen Sie $\dot{x} =: y$, $\ddot{x} =: z$ und sei $\boldsymbol{v} := (x, y, z)^T$ mit $\dot{\boldsymbol{v}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$. Mit Hilfe von $\boldsymbol{v}$ kann nun die homogene Differentialgleichung 3.Ordnung als ein System 1.Ordnung $\dot{\boldsymbol{v}} = A\boldsymbol{v}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ formuliert werden. Geben Sie die Matrix A an.

(d) Geben Sie in der Notation aus (c) die Lösung der Differentialgleichung in der Vektorform $\boldsymbol{v}$ an.

Hinweis: Berechnen Sie $\dot{z} = \dddot{x}$ aus der gegebenen Differentialgleichung.

Lösungen

1. $x(t) = \left(\sqrt{c\,\mathrm{e}^{5t^2}+1}\right)^{-1}$

2. $y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{c\mathrm{e}^{-9t}+\frac{2}{3}}}$

3. $y(x) = x + \frac{1}{c\mathrm{e}^{-x}-2}$

4. $\boldsymbol{x}(t) = \left(\frac{9}{4}\mathrm{e}^{4t} - \frac{5}{4}\ , \frac{27}{16}\mathrm{e}^{4t} + \frac{1}{4}t + \frac{53}{16}\right)^{\mathrm{T}}$

5. $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & t^{-2}\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{e}^t t^{-2} \end{pmatrix}$

6. $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-4t} + 6\mathrm{e}^{6t} \\ -\mathrm{e}^{-4t} + 6\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix}$

7. (a) $x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2t\mathrm{e}^{-t} + C_3$, (b) $x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2t\mathrm{e}^{-t} + C_3 + \frac{1}{24}\mathrm{e}^{3t}$,
   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$