Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe A (DI, 3.5.2016) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := \frac{24(x^2+y)\cdot x^4}{(5y^4)^2+(x^3+y^2)^3\cdot x}, \ (x,y)\neq(0,0), \quad f(0,0) := 0.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist. *a): 3 P.*

Hinweis: Es reicht zwei Nullfolgen x und y so zu finden, dass

$$\lim_{x\to0\ y\to0} f(x,y) \neq 0.$$

Mit $x = h$ und $y = -h$; $\quad h \to 0$ gilt:

$$f(h,-h) = \lim_{(h\to0)} \frac{24\cdot(h^2-h)\cdot h^4}{25h^8+(h^3+h^2)^3\cdot h}$$

$$f(h,-h) = \lim_{(h\to0)} \frac{24h^5\cdot(h-1)}{25h^8+h\cdot h^6(h+1)^3}$$

Kürzen durch h^5 :

$$f(h,-h) = \lim_{(h\to0)} \frac{24h-24}{25h^3+h^2\cdot(h+1)^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{(h\to0)} f(h,-h) \to -\infty$$

Die Funktion ist also im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

b) Betrachten Sie Richtungen $h = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\| = 1$ und $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ (beide Komponenten von h verschwinden nicht gleichzeitg). Zeigen Sie, dass für solche Richtungen die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt $(0,0)$ *nicht existiert.* *a): 3 P.*

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Richtungsableitung.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon}, \quad (\varepsilon h) = \begin{pmatrix} \varepsilon h_1 \\ \varepsilon h_2 \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24(\varepsilon^2 h_1^2 + \varepsilon h_2) \cdot \varepsilon^4 h_1^4}{25\varepsilon^8 h_2^8 + \varepsilon h_1 \cdot (\varepsilon^3 h_1^3 + \varepsilon^2 h_2^2)^3}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24\varepsilon^5(\varepsilon h_1^6 + h_1^4 h_2)}{25\varepsilon^8 h_2^8 + \varepsilon h_1 \varepsilon^6 \cdot (\varepsilon h_1^3 + h_2^2)^3}$$

Kürzen durch ε^5 :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24 \cdot (\varepsilon h_1^6 + h_1^4 h_2)}{25\varepsilon^3 h_2^8 + \varepsilon^2 h_1 \cdot (\varepsilon h_1^3 + h_2^2)^3}$$

Anwendung des Limes:

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon} \to \infty$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 1$.
Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse–Matrix von f in einem Punkt (x,y). *a): 2 P.*

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} 3x^2 - 6y \\ 2y - 6x \end{pmatrix} \\
H(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Entwickeln Sie f in ein quadratisches Taylor–Polynom um den Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$. *b): 1 P.*

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} H(f)(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&= 2 + \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix} \\
&= 1 - 6xy + y^2
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.
Geben Sie an, ob f an diesen Punkten elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.
Handelt es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte? *c): 3 P.*

Die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 3x^2 - 6y \\ 2y - 6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist an den Punkten $(0,0)$ und $(6,18)$ erfüllt.
Anwendung des Hauptminorenkriteriums:

$$\begin{aligned} \det H(f)(0,0) &= \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -36 < 0 \\ \det H(f)(6,18) &= \begin{vmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 36 > 0 \ \wedge \ 36 > 0 \end{aligned}$$

Daher ist $(0,0)$ hyperbolisch (Sattelpunkt) und $(6,18)$ elliptisch (Minimum).

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-6\sqrt{x^2+y^2}+8 \\ x^2+y^2+z^2-2x-6y+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Entscheiden Sie, ob sich das Gleichungssytem an $(x,y,z) = (0,3,1)$ lokal nach x und z auflösen lässt und geben Sie den Tangentenvektor $(x'(3), z'(3))$ an. *a): 3 P.*

Überprüfe die drei Voraussetzungen:

$$g(0,3,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Jacobimatrix von g ist

$$J(g)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{6x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2y - \frac{6y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \\ 2x-2 & 2y-6 & 2z \end{pmatrix} .$$

Alle partiellen ersten Ableitungen von g sind stetig. Die partielle Jacobimatrix an $(0,3,1)$

$$J_{xz}(g)(0,3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist regulär.
Das Gleichungssystem für den Tangentenvektor erhält man durch implizite Differentiation der Gleichung $g(x,y,z) = 0$:

$$\begin{aligned} g(x(y), y, z(y)) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g(x(y), y, z(y)) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial(x,z)} \cdot \begin{pmatrix} x'(y) \\ z'(y) \end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

An $(x,y,z) = (0,3,1)$ wird daraus

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(3) \\ z'(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem ist $(x'(3), z'(3)) = (0,0)$.

b) Die Gleichung $f(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0$ kann lokal um den Punkt $(0,0)$ nach y aufgelöst werden.
Bestimmen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $y(x)$ das Taylorpolynom 1. Grades mit Anschlussstelle $(0,0)$ durch implizite Differentiation.

Zusatzpunkt: Erweitern Sie das Taylorpolynom um den quadratischen Term.

b): 1 P. + 1 ZP.

Erste Ableitung durch implizite Differentiation:

$$f(x,y(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x,y(x)) = 0$$
$$\frac{\partial\, f}{\partial\, y} y'(x) + \frac{\partial\, f}{\partial\, x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{\partial\, f/\partial\, x}{\partial\, f/\partial\, y}$$
$$y'(x) = -\frac{-\mathrm{e}^{y-x} + 2x}{\mathrm{e}^{y-x} + 3} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \frac{1}{4}$$

$$T_1(x) = \frac{1}{4}x$$

Zweite Ableitung durch nochmaliges implizites Differenzieren: (mit $\partial\, f/\partial\, x = f_x$)

$$0 = f_{xx} + 2f_{xy}y'(x) + f_{yy}y'^2(x) + f_y y''(x)$$
$$\Rightarrow y''(x) = -\frac{f_{xx} + 2f_{xy}y'(x) + f_{yy}y'^2(x)}{f_y} \Rightarrow y''(0) = -\frac{39}{64}$$

$$T_2(x) = \frac{1}{4}x - \frac{39}{128}x^2$$

c) Man bestimme alle Punkte, an denen die Funktion $f(x,y,z) = x^2$ nach der Lagrange Multiplikatorenmethode einen Extremwert auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2=1$ mit der Ebene $z=x$ haben kann.
Es ist nicht notwendig, diese Punkte weiter zu charakterisieren.

c): 2 P.

Die Lagrangefunktion lautet

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) + \lambda_2(z-x)\ .$$

Es ist das Gleichungssystem

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0$$

zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 2x+2\lambda_1 x-\lambda_2 \\ 2y\lambda_1 \\ 2z\lambda_1+\lambda_2 \\ x^2+y^2+z^2-1 \\ z-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Aus der zweiten Nebenbedingung folgt sofort $z=x$ und wir unterscheiden in der zweiten Zeile zwei Fälle:
Erster Fall: $\lambda_1 = 0 \Rightarrow x = z = 0, y = \pm 1$.
Zweiter Fall: $y = 0 \Rightarrow x = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$