

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe C (DI, 3.5.2016) (mit Lösung)

— Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i> <input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• Aufgabe 1.

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = -3x^3 + y^2 + 3xy + 5$.

Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x, y) .

a): 2 P.

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} -9x^2 + 3y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \\ H(f)(x, y) &= \begin{pmatrix} -18x & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b) Entwickeln Sie f in ein quadratisches Taylor-Polynom um den Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

b): 1 P.

$$\begin{aligned}T(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T H(f)(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &= 5 + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 5 + 3xy + y^2\end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f .
Geben Sie an, ob f an diesen Punkten elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.
Handelt es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte?

c): 3 P.

Die Bedingung

$$\begin{pmatrix} -9x^2 + 3y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist an den Punkten $(0, 0)$ und $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ erfüllt.

Anwendung des Hauptminorenkriteriums:

$$\begin{aligned} \det H(f)(0, 0) &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 < 0 \\ \det H(f)(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) &= \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 > 0 \wedge 9 > 0 \end{aligned}$$

Daher ist $(0, 0)$ hyperbolisch (Sattelpunkt) und $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ elliptisch (Minimum).

• **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{x^2 + z^2} - 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3y - 6z + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob sich das Gleichungssystem an $(x, y, z) = (0, -1, 3)$ lokal nach y und z auflösen lässt und geben Sie den Tangentenvektor $(y'(0), z'(0))$ an.

a): 3 P.

Überprüfe die drei Voraussetzungen:

$$g(0, -1, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Jacobimatrix von g ist

$$J(g)(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x + \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} & 2y & 2z + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ 2x & 2y - 3 & 2z - 6 \end{pmatrix}.$$

Alle partiellen ersten Ableitungen von g sind stetig. Die partielle Jacobimatrix an $(0, -1, 3)$

$$J_{xz}(g)(0, -1, 3) = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

ist regulär.

Das Gleichungssystem für den Tangentenvektor erhält man durch implizite Differentiation der Gleichung $g(x, y, z) = 0$:

$$\begin{aligned} g(x, y(x), z(x)) &= 0 \\ \frac{d}{dx}g(x, y(x), z(x)) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial(y, z)} \cdot \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

An $(x, y, z) = (0, -1, 3)$ wird daraus

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem ist $(y'(0), z'(0)) = (0, 0)$.

b) Die Gleichung $f(x, y) = e^{xy} + x^3y^2 - 2y + 1 = 0$ kann lokal um den Punkt $(0, 1)$ nach y aufgelöst werden.

Bestimmen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $y(x)$ das Taylorpolynom 1. Grades mit Anschlussstelle $(0, 1)$ durch implizite Differentiation.

Zusatzpunkt: Erweitern Sie das Taylorpolynom um den quadratischen Term.

b): 1 P. + 1 ZP.

Erste Ableitung durch implizite Differentiation:

$$\begin{aligned} f(x, y(x)) = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} y'(x) + \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \\ y'(x) = -\frac{ye^{xy} + 3x^2y^2}{xe^{xy} + 2x^3y - 2} &\Rightarrow y'(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

Zweite Ableitung durch nochmaliges implizites Differenzieren: (mit $\partial f / \partial x = f_x$)

$$\begin{aligned} 0 &= f_{xx} + 2f_{xy}y'(x) + f_{yy}y'^2(x) + f_y y''(x) \\ \Rightarrow y''(x) &= -\frac{f_{xx} + 2f_{xy}y'(x) + f_{yy}y'^2(x)}{f_y} \Rightarrow y''(0) = 1 \end{aligned}$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

- c) Man bestimme alle Punkte, an denen die Funktion $f(x, y, z) = xy$ nach der Lagrange Multiplikatorenmethode einen Extremwert auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mit der Ebene $x + z = 0$ haben kann.

Es ist nicht notwendig, diese Punkte weiter zu charakterisieren.

c): 2 P.

Die Lagrangefunktion lautet

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \lambda_2(x + z) .$$

Es ist das Gleichungssystem

$$\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

zu lösen:

$$\begin{pmatrix} y + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ x + 2\lambda_1 y \\ 2\lambda_1 z + \lambda_2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

• **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := \frac{24(x^2 + y) \cdot x^4}{(5y^4)^2 + (x^3 + y^2)^3 \cdot x}, \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) := 0.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig ist.

a): 3 P.

Hinweis: Es reicht zwei Nullfolgen x und y so zu finden, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y) \neq 0.$$

Mit $x = h$ und $y = -h$; $h \rightarrow 0$ gilt:

$$f(h, -h) = \lim_{(h \rightarrow 0)} \frac{24 \cdot (h^2 - h) \cdot h^4}{25h^8 + (h^3 + h^2)^3 \cdot h}$$

$$f(h, -h) = \lim_{(h \rightarrow 0)} \frac{24h^5 \cdot (h - 1)}{25h^8 + h \cdot h^6(h + 1)^3}$$

Kürzen durch h^5 :

$$f(h, -h) = \lim_{(h \rightarrow 0)} \frac{24h - 24}{25h^3 + h^2 \cdot (h + 1)^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{(h \rightarrow 0)} f(h, -h) \rightarrow -\infty$$

Die Funktion ist also im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig.

- b) Betrachten Sie Richtungen $h = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\| = 1$ und $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ (beide Komponenten von h verschwinden nicht gleichzeitig). Zeigen Sie, dass für solche Richtungen die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt $(0, 0)$ *nicht existiert*. a): 3 P.

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Richtungsableitung.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon}, \quad (\varepsilon h) = \begin{pmatrix} \varepsilon h_1 \\ \varepsilon h_2 \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24(\varepsilon^2 h_1^2 + \varepsilon h_2) \cdot \varepsilon^4 h_1^4}{25\varepsilon^8 h_2^8 + \varepsilon h_1 \cdot (\varepsilon^3 h_1^3 + \varepsilon^2 h_2^2)^3}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24\varepsilon^5(\varepsilon h_1^6 + h_1^4 h_2)}{25\varepsilon^8 h_2^8 + \varepsilon h_1 \varepsilon^6 \cdot (\varepsilon h_1^3 + h_2^2)^3}$$

Kürzen durch ε^5 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24 \cdot (\varepsilon h_1^6 + h_1^4 h_2)}{25\varepsilon^3 h_2^8 + \varepsilon^2 h_1 \cdot (\varepsilon h_1^3 + h_2^2)^3}$$

Anwendung des Limes:

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon} \rightarrow \infty$$