Übungen zu Analysis 2, 4. Übung

1. Sei $\alpha \geq 0$, und I_α sei definiert als
$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \, dx.$$
Man finde durch partielle Integration eine Relation zwischen I_α und $I_{\alpha+2}$. Man zeige mit Hilfe dieser Rekursionsformel, dass für $k \in \mathbb{N}$ folgende zwei Formeln gelten:
$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$
$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

2. Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $k \in \mathbb{N}$ zeige man
$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x.$$
Daraus und aus der vorigen Nummer leite man folgende Ungleichungen her:
$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k) \cdot 2} \leq \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}.$$
Nun forme man diese Ungleichung so um, sodass in der Mitte nur noch $\frac{\pi}{2}$ steht, und man leite daraus die Wallische Produktformel her:
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \to \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{2k}.$$

3. Überprüfe, ob folgende Integrale absolut konvergieren:
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{x \sin x}} \, dx.$$

4. Sei $\mathcal{Q}[a,b]$ die Menge alle stückweise stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$. Weiters sei $\mathcal{N}$ die Menge aller $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, sodass $f(t) \neq 0$ für nur endlich viele t.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{Q}[a,b]$ (versehen mit punktweiser Addition und Multiplikation) ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{N}$ ein Unterraum davon ist. Weiters zeige man, dass $(c, f + \mathcal{N}) \mapsto F$, wobei $F(x) = c + \int_a^x f(t) \, dt$ eine wohldefinierte, lineare und bijektive Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathcal{Q}[a,b]/\mathcal{N}$ auf
$$\{F \in C[a,b] : F \text{ ist einmal differenzierbar auf } [a,b] \text{ mit } F' \in \mathcal{Q}[a,b]\}.$$
   Bestimmen Sie auch die Umkehrfunktion dieser linearen Bijektion!

5. Geben Sie eine Riemann-integrierbare aber nicht stückweise stetige Funktion f an und führen Sie aus, warum f diese Eigenschaft hat!

   Hinweis: Betrachten Sie etwa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1$ auf $[\frac{1}{2}, 1]$, $f(t) = \frac{1}{2}$ auf $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $f(t) = \frac{1}{4}$ auf $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, usw. . Bauen Sie zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung von $[0,1]$, sodass die Differenz von Ober- und Untersumme kleiner als ϵ wird.

6. Man betrachte die Funktionenfolge

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x-k}.$$

   für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Man zeige, dass $S_N(x)$ auf jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $h(x)$ konvergiert.

   Man berechne $h(k + \frac{1}{2})$ für $k \in \mathbb{Z}$.

   Schließlich zeige man $h(x) = \pi \cot(\pi x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, indem man ihre Ableitungen vergleichts. Man verwende dazu Beispiel 1 von der ersten und Beispiel 3 von der dritten Übung.

   Hinweis: Es gilt $S_N(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x^2-k^2}$. Begründung für Vertauschen von Limes und Differenzieren!

7. Man berechne

$$\lim_{a \to 0} \int_0^1 \frac{1}{1 + a\sin^2(x)}\, dx\ .$$

8. Man berechne

$$\lim_{x \to 0+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt\ .$$

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\lim_{x\to 0+} \int_0^R .. = \int_0^R \lim_{x\to 0+} ..$ für jedes feste reelle $R \geq 0$. Dann definiere man $H : [0,+\infty) \times (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $H(R,x) := \int_0^R \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$, wobei $[0,+\infty)$ durch $\leq$ und $(0,1]$ durch $\geq$ gerichtet sind. Nun weise man nach, dass sich Lemma 8.7.1 anwenden lässt.