# Übungen zu Analysis 2, 6. Übung

1. Seien $T, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und sei $T$ invertierbar. Man zeige, dass $T^{-1}e^A T = e^{T^{-1}AT}$. Weiters berechne man $e^A$, wenn $A$ eine Diagonalmatrix ist und wenn
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit $\|.\|_1$. Man betrachte $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ den Raum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, d.h. den Dualraum von $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Abbildungsnorm $\|.\|$. Bekanntlich ist $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$, indem man ein $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ in Matrixform $(a_1, \ldots, a_n)$ angibt. Man zeige, dass dann $\|.\|$ mit der $\|.\|_\infty$-Norm übereinstimmt.

   Bemerkung: Es gilt auch, dass wenn man $\mathbb{R}^n$ mit $\|.\|_\infty$ versieht, die Abbildungsnorm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit der $\|.\|_1$ auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

3. Mit welcher Norm stimmt die Abbildungsnorm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ überein, wenn man $\mathbb{R}^n$ mit $\|.\|_2$ versieht. Warum?

4. Man betrachte den Banachraum $l^\infty$ aller beschränkten, komplexwertigen Folgen versehen mit der Norm $\|.\|_\infty$; also $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$. $c_0$ sei der Banachraum aller komplexwertigen Nullfolgen.

   Weiters sei $A : l^\infty \to c_0$ definiert durch
$$A((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{1}{n} z_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
   Man zeige, dass $A$ tatsächlich nach $c_0$ hinein abbildet, und dass $A$ linear, beschränkt, injektiv, aber nicht surjektiv ist.

5. Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ ein normierte Räume und $(L(X, Y), \|.\|)$ der Raum aller beschränkten linearen Abbildungen von $X$ nach $Y$. Weietrs sei $x \in X$ fest. Zeigen, Sie, dass die Abbildung $A \mapsto Ax$ als Abbildung von $L(X, Y)$ nach $Y$ beschränkt und linear ist. Bestimmen Sie die Abbildungsnorm dieser Abbildung!

   Ist weiters $E$ eine nichtleere Menge und $t \in E$, so zeige man auch, dass die Abbildung
$$\mathcal{B}(E, Y) \to Y, \quad f \mapsto f(t)$$
   beschränkt und linear ist. Bestimmen Sie auch hier die Abbildungsnorm dieser Abbildung!

6. Sei $C[0, 1]$ die Menge aller stetigen und komplexwertigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit der Supremumsnorm. Weiters sei $h : [-1, 1] \to C[0, 1]$ definiert durch
$$h(t) = (s \mapsto \frac{s}{s + 2 + t}) \ .$$
   Zeigen Sie, dass $h$ stetig ist, indem Sie $\|h(t_1) - h(t_2)\|_\infty$ abschätzen. Berechnen Sie auch
$$\int_{-1}^{1} h(t) \ dt \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie das vorherige Beispiel, um $(\int_{-1}^{1} h(t)\ dt)(s) = \int_{-1}^{1} (h(t))(s)\ dt$ nachzuweisen.

7. Sei $F : [1,2] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 5 \\ \sin t + \frac{t^2}{t+1} \\ t \exp(3t) \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $\int_1^2 F(t)\ dt$ und $F'$.

8. Für $p \geq 1$ sei $l^p$ die Menge aller komplexwertigen Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p < +\infty$ erfüllen. Man zeige, dass $l^p$ mit der gliedweisen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist, und dass $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p}$ eine Norm auf $l^p$ ist.

   Bemerkung: $(l^p, \|.\|_p)$ ist sogar ein Banachraum.

   Ist nämlich $((z_n^k)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $l^p$, so ist für ein festes $j \in \mathbb{N}$ wegen $|z_j^k - z_j^k| \leq \|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n^l)_{n\in\mathbb{N}}\|_p$ auch jede Komponentenfolgen $(z_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und somit konvergent gegen ein $z_j \in \mathbb{C}$ konvergiert.

   Es bleibt $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ und $\|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \to 0$ zu zeigen. Dazu sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig und $k_0$ so, dass $k, l \geq k_0 \Rightarrow \|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n^l)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \leq \epsilon$. Wegen

$$\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{N} |z_n^k - z_n^l|^p} \leq \|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n^l)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \leq \epsilon$$

   folgt für $l \to \infty$, dass mit beliebigen $N \in \mathbb{N}$, $\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{N} |z_n^k - z_n|^p} \leq \epsilon$ und wegen der Dreiecksungleichung $\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{N} |z_n|^p} \leq \epsilon + \|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\|_p$.

   Mit $N \to \infty$ folgt aus letzerer Tatsache, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, und aus der vorletzten Ungleichung $\|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \leq \epsilon$ und zwar für alle $k \geq k_0$.

9. Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge in einem normierten Raum $(X, \|.\|)$, die für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert $w \in X$ konvergiert. Man zeige, dass dann auch die Folge

$$\frac{w_1 + \cdots + w_n}{n}$$

   gegen $w$ konvergiert.

   Hinweis: Zeigen Sie das Ergebnis zuerst unter der Annahme, dass $w_n \in \mathbb{R}$, $w_n \geq 0$ und $w = 0$, und führen Sie das allgemeine Ergbenis auf diesen Fall zurück, indem Sie die Trivialität $w = \frac{w+\cdots+w}{n}$ verwenden.