Übungen zu Analysis 2, 7. Übung

1. Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\xi,\eta)^T = (\xi^2\eta\sin\xi\eta, \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+1})^T$. Berechne alle partielle Ableitungen sowie $df(x)$, $x = (\xi,\eta)^T \in \mathbb{R}^2$. Schließlich berechne man die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ für $v = (1,1)^T$ und $(1,-1)^T$.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, dh. $A^T = A$, und betrachte die Abbildung $f(x) = x^TAx$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Man zeige, dass $df(x) = 2(Ax)^T$, und berechne die Richtungsableitung entlang von $v = x$.

3. Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ und $f : \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ definiert durch $f(x) = \ln\|x\|_2$ im Falle $p = 2$ und $f(x) = \frac{1}{(2-p)\|x\|_2^{p-2}}$ wenn $p > 2$.

   Man zeige, dass $\operatorname{grad} f(x) = (df(x))^T = \frac{1}{\|x\|_2^p}x$.

4. Man betrachte die Funktion f aus Beispiel 9.1.8 im Skriptum und zeige, dass in $(0,0)^T$ alle partiellen Ableitungen existieren, sie aber in $(0,0)^T$ nicht differenzierbar ist. Berechnen Sie von f auch alle höheren Ableitungen zweiter Ordnung an allen Punkten der Ebene $\neq (0,0)^T$.

5. Man betrachte die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\} \to \mathbb{R}^+ \times (-\pi,\pi)$,
$$g(\xi,\eta)^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\xi^2+\eta^2} \\ \arg(\xi+i\eta) \end{pmatrix},$$
   wobei das Argument $\arg(\xi+i\eta) \in (-\pi,\pi)$ so definiert ist, dass $f(\sqrt{\xi^2+\eta^2}, \arg(\xi+i\eta))^T = (\xi,\eta)^T$, wobei $f(r,\phi)^T = (r\cos\phi, r\sin\phi)^T$.

   Berechne alle partiellen Ableitungen sowie $dg(x)$ und $\det dg(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$.

   Hinweis: Stellen Sie $\arg(x+iy)$ mit Hilfe des Arcustangens bzw. Arcuscotangens quadrantenweise dar!

6. Berechnen Sie $I'(\alpha)$, wobei $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $I(\alpha) = \int_{-\exp(\alpha)}^{\alpha^2} \cos(\alpha t^2)\,dt$.

7. Sei $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(t) = (\cos t)^{\sin t}$ man berechne h' auf 2 Arten. Zuerst direkt und dann mittels Anwendung der Kettenregel auf $f(t) = (\cos t,\ \sin t)$ und $g(\xi,\eta)^T = \xi^\eta$. Man gebe auch geeignete offene Definitionsbereiche von f und g an!

8. Funktionen $f : D \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $D \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, die stetig differenzierbar sind, und die zusätzlich die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$
   wobei $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ und $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, erfüllen, nennt man holomorph.

   Man zeige, dass $z \mapsto \exp(z)$, $z \mapsto z$ holomorph auf $D = \mathbb{C}$ und $z \mapsto \frac{1}{z}$ analytisch auf $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind, indem man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nachprüft!

9. Man betrachte die Funktion $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$. Berechne alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x,y)$ mit $k,l = 1,2$, sowie $d^m f(x,y)(v_1,\dots,v_m)$ für $m = 1,2$.

   Schließlich berechne man das Taylorsche Polynom (in x,y) ohne Restglied mit $q = 3$ gemäß dem entsprechenden Satz im Skriptum.

10. Sei $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$ und $f : \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ definiert durch $f(x) = \ln \|x\|_2$ im Falle $p = 2$ und $f(x) = \frac{1}{(2-p)\|x\|_2^{p-2}}$ wenn $p > 2$.

    Man zeige, dass f harmonisch ist! Weiters zeige man, dass für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}^p$ auch $x \mapsto f(x - x_0),\ x \in \mathbb{R}^p \setminus \{x_0\}$ harmonisch ist.

    Dabei heißt eine Funktion $h : B \to \mathbb{X},\ B \subseteq \mathbb{R}^m$ harmonisch, wenn

    $$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} h(x) + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} h(x) = 0$$

    für alle $x \in B$.