Übungen zu Analysis 2, 8. Übung

1. Lineare Regression:

   Seien $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2,\ i = 1, \ldots, n$ endlich viele, fest vorgegebene Messdaten, wobei zumindest zwei verschiedene x_i auftreten. Man bestimme eine linear Funktion $f(x) = kx + d$ so, dass der quadratische Abstand

   $$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

   minimal wird!

   Also: Man betrachte $F(k, d) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$ als Funktion von (k, d) und finden Sie die Kandidaten für lokale Extrema!

   Begründen Sie auch, warum der erhaltene Kandidat Tatsächlich ein Minimum ist, indem Sie u.a. $\lim_{\|(k,d)^T\| \to +\infty} F(k, d) = +\infty$ zeigen.

   Hinweis zum letzten Teil: Zunächst ist $\sqrt{F(k, d)} \geq \sqrt{(kx_1 + d + y_1)^2 + (kx_2 + d + y_2)^2}$. Zeigen Sie nun, dass $\|((kx_1 + d + y_1), (kx_2 + d + y_2))^T\|_2 \geq \|(kx_1 + d, kx_2 + d)^T\|_2 - \|(y_1, y_2)^T\|_2$ und dann $\|A^{-1}\| \cdot \|((kx_1 + d), (kx_2 + d))^T\|_2 \geq \|(k, d)^T\|_2$, wobei $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. $c(D)$ sei der Abschluss von D in $\mathbb{R}^n$. Weiters sei $f : c(D) \to \mathbb{R}$ stetig und so, dass $f|_D : D \to \mathbb{R}$ aus C^2 ist mit $\Delta f(x) \geq 0$ für alle $x \in D$, wobei

   $$\Delta f(x) := \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(x) + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(x) = 0\ .$$

   Zeigen Sie, dass $f : c(D) \to \mathbb{R}$ in $c(D)$ und $f|_{c(D)\setminus D} : c(D) \setminus D \to \mathbb{R}$ in $c(D) \setminus D$ jeweils mindestens eine Maximalstelle haben und dass $\max_{t \in c(D)} f(t) = \max_{t \in c(D)\setminus D} f(t)$.

   Hinweis: Angenommen $x_0 \in D$ wäre Maximalstelle mit $f(x_0) > \max_{t \in c(D)\setminus D} f(t) =: \eta$. OBdA. sei $f(x_0) > 0 > \eta$ angenommen. Betrachte eine Maximalstelle von $g(x) = f(x) + c(\|x - x_0\|_2^2 - d)$ für $x \in c(D)$ mit geeignet gewählten $c, d > 0$, sodass $\|x - x_0\|_2^2 - d < 0$ für $x \in c(D) \setminus D$ und sodass $g(x_0) > 0$! Warum geht das? Wo können die Maximalstellen x_1 von g nur liegen und was gilt für $\Delta g(x_1)$?

3. Wo besitzt $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ ein globales Extremum, wobei

   $$f(x, y) = 3x^2 - 2(y + 1)x + 3y - 1.$$

   Hinweis: Kandidaten für Extrema in $(0, 1) \times (0, 1)$ erfüllen $df(x, y) = 0$. Kandidaten in $(0, 1) \times \{0\}$ erfüllen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$ usw. .

4. Wie im letzten Beispiel, aber für $f : \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$

   $$f(x, y) = 8x^2 - 2yx + 3y - 1.$$

5. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(z) = \overline{z}(z-2) - 2\,\mathrm{Re}\, z\,, \qquad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}\,,$$

alle lokalen Extrema der Funktion $|f(z)|$ sowie deren Typ, dh. Maximum, Minimum.

6. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $A, B \subseteq X$ nichtleer, so ist der Abstand von A und B definiert durch $d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

   Für $x \in X$, $\emptyset \neq A \subseteq X$ setzt man $d(x, A) := d(\{x\}, A)$.

   Man zeige: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, sowie die Tatsache, dass $x \mapsto d(x, A)$ eine stetige Abbildung von X nach $\mathbb{R}$ ist.

7. Seien $K, A \subseteq \mathbb{R}^p$ nichtleere Teilmengen, wobei K kompakt und A abgeschlossen ist. Man zeige, dass es $x \in K, y \in A$ gibt mit $d(x, y) = d(A, K)$.

   Hinweis: Ist $x_n \in K$, $y_n \in A$, sodass $\lim d(x_n, y_n) = d(A, K)$, so zeige man zuerst, dass dann $d(0, y_n) \leq C$ für alle n und ein geeignetes $C > 0$. Also $y_n \in K_C(0) \cap A$. Nun verwende man die Kompaktheit von K bzw. $K_C(0) \cap A$ (warum?) um geeignete $x \in K$ und $y \in A$ zu finden.

8. Sei $K = \{(\cos t, \sin t)^T \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ und $A = \{(\xi, \eta)^T : 2\xi + 3\eta = 10\}$. Man zeige, dass K kompakt und A abgeschlossen ist. Weiters bestimme man $x \in K, y \in A$ so, dass $d(x, y) = d(A, K)$. Man zeige, dass x normal auf die Gerade A steht.

9. Man berechne die Länge der Wege $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})^T,\ \gamma(t) = (t, \cosh(t))^T,$$

   und gebe die zu den γ's äquivalente Wege γ' an, wobei der Parameter von γ die Bogenlänge ist.

10. Man zeige, dass $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(t) = (t, t^2 \cos \frac{\pi}{t^2})^T, t > 0$ zwar stetig, aber nicht rektifizierbar ist.

    Hinweis: Berechne $L(\mathcal{Z})$ für $\mathcal{Z} = \{0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\}$.