Übungen zu Analysis 2, 10. Übung

1. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = r\exp(it)$ mit festem, aber beliebigen $r > 0$. Berechnen Sie das komplexe Wegintegral
$$\int_\gamma z^k \, dz \ .$$

2. Man berechne das komplexe Wegintegral $\int_\gamma \frac{1}{z-w} dz$, wobei $\gamma(t) = \exp(it),\ t \in [0, 2\pi]$, und $|w| \neq 1$.

   Hinweis: Ist $|w| > 1$, so gilt $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{w^n}$, und ist $|w| < 1$, so gilt $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^\infty \frac{w^n}{z^n}$. Begründen Sie allfällige Vertauschungen von Limes und Integral!

3. Sei $\gamma_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_1(t) = \exp(it)$ und $\gamma_2 : [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_2(t) = i - (t - \frac{\pi}{2})i$. Berechnen Sie die komplexen Wegintegrale
$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} |z| \, dz \ , \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \bar{z} \, dz \ .$$

4. Sei $h : \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ definiert durch $h(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, wobei $\arg(z)$ wie in Beispiel 5 der 7ten Übung definiert ist. Zeigen Sie, dass h holomorph ist, und berechnen Sie die $h'(z)$!

5. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant ist, wenn f nur Werte aus $\mathbb{R}$ ($\subseteq \mathbb{C}$) oder nur Werte aus $i\mathbb{R}$ ($\subseteq \mathbb{C}$) annimmt.

   Hinweis: Was gilt für $df(z)$?

6. Für $w \in \mathbb{C}$ und einen geschlossenen, stetigen und stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $w \notin \gamma([a, b])$ ist die Umlaufzahl von γ um w definiert durch
$$n(\gamma, w) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z - w} \, dz \ .$$

   Zeigen Sie, dass $n(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$. Geschlossener Weg bedeutet $\gamma(a) = \gamma(b)$.

   Hinweis: Setzen Sie $g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w} \, ds$ und leiten dann $e^{-g(t)}(\gamma(t) - w)$ nach t ab. Was bedeutet das Ergebnis, wenn Sie $e^{-g(b)}$ und $e^{-g(a)}$ vergleichen?

7. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und stetig differenzierbar aber nicht notwendigerweise geschlossen. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung
$$w \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z - w} \, dz$$
   von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ nach $\mathbb{C}$ stetig ist.

8. Mit der Notation aus dem vorletzten Beispiel sei γ ein fester geschlossener, stetiger und stetig differenzierbarer Weg . Weiters sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sodass $\gamma([a, b]) \cap G = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $n(\gamma, w)$ für alle $w \in G$ den selben Wert ergibt.

   Zeigen Sie auch, dass dieser Wert Null ist, falls G nicht beschränkt ist.

9. Nun sei $H \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $w \in \mathbb{C} \setminus H$. Zeigen Sie, dass für jeden geschlossenen, stetigen und stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to H$ (also jeden Weg der in H verläuft) immer $n(\gamma, w) = 0$ gilt.

10. Überprüfen Sie die Kettenregel für holomorphe Funktionen aus Proposition 11.5.9 auf 2 verschiedene Arten. Einmal ähnlich wie die eindimensionale Kettenregel aus dem Kapitel 7, ANA1, und ein zweites mal mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel.