Übungen zu Analysis 2, 12. Übung

1. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Zeige: Die Abbildung
$$\hat{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\ x,y \in X\,,$$
ist eine Metrik auf X, sodass $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\hat{d})$. Es gilt stets $0 \leq \hat{d}(x,y) \leq 1$.

2. Sei $f : M \to N$ eine Funktion, und $\mathfrak{F}$ ein Filter auf M. Man zeige, dass $f(\mathfrak{F}) = \{f(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ eine Filterbasis eines Filters $\mathfrak{G}$ auf N ist. Man zeige auch, dass $\mathfrak{G} = \{G \subseteq N : f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}\}$ ist. Man gebe schließlich ein Beispiel an, sodass $f(\mathfrak{F})$ war eine Filterbasis, aber kein Filter ist.

3. Sei X eine nichtleere Menge und d die diskrete Metrik, dh. $d(x,y) = 1, x \neq y$ und $d(x,x) = 0$. Man zeige, dass dann $\mathcal{T}(d) = \mathcal{P}(X)$.

4. Man betrachte $X := \{1,2,3\}$, $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, X\}$. Man zeige, dass $(X, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum ist. Ist er Hausdorffsch? Weiters bestimme man den Umgebungsfilter und eine möglichst kleine Filterbasis davon um jeden Punkt $x \in X$.

   Schließlich bestimme man den Abschluss einer jeden Teilmenge von X!

5. Sei X eine nichtleere Menge, und definiere $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subseteq X$ als
$$\mathcal{T}_1 := \big\{A \subseteq X :\ A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich}\big\}\ ,$$
$$\mathcal{T}_2 := \big\{A \subseteq X :\ A = X \text{ oder } A \text{ endlich}\big\}\ .$$
Für welche X sind $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_2$ Topologien? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Hinweis: Unterscheide die Fälle, dass X endlich oder unendlich ist.

6. Sei $\mathcal{T}$ die Topologie $\mathcal{T}_1$ aus dem letzten Beispiel! Man spricht von der cofiniten Topologie auf der Menge X.

   (i) Bestimme alle abgeschlossenen Teilmengen und den Abschluss einer beliebigen Teilmenge von X.

   (ii) Ist die cofinite Topologie Hausdorff?

   (iii) Für welche X ist $\mathcal{T}$ eine metrische Topologie, dh. es gibt eine Metrik d, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$?

   Hinweis: Unterscheide die Fälle, dass X endlich oder unendlich ist.

7. Für eine topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ zeige man:

   (i) $B \subseteq X \Rightarrow B^\circ \subseteq B$.

   (ii) $C \subseteq B \Rightarrow C^\circ \subseteq B^\circ$.

   (iii) $B \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $B = B^\circ$.

   (iv) $C, B \subseteq X \Rightarrow (C \cap B)^\circ = C^\circ \cap B^\circ$.

8. Für eine topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $M \subseteq X$ sei $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$! Man zeige:

   (i) ∂M ist immer abgeschlossen.

   (ii) $\partial M = \{x \in X : \forall U \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow U \cap M \neq \emptyset \neq U \setminus M\}$.

   (iii) $\partial M = \partial(M^c)$.

   (iv) $\partial M = \emptyset \Longleftrightarrow M, M^c \in \mathcal{T}$.

9. Sei G eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G, sodass für alle $g \in G$ die Abbildungen $h \mapsto gh$ und $h \mapsto hg$ stetig sind.

   Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ diese Abbildungen sogar Homöomorphismen sind. Zeigen Sie, auch dass eine Untergruppe H von G, welche bzgl. $\mathcal{T}$ offen ist, auch abgeschlossen ist!

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{gH : g \in G\}$ eine Partition abgibt, also dass dieses Mengensystem die Restklassenmenge einer Äquivalenzrelation ist.

10. Sei $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der von d_2 induzierten Topologie. Weiters sei $Y = (-1, 1) \times (-1, 1)$ versehen mit der von der Einschränkung $d_2|_{Y \times Y}$ von d_2 auf Y induzierten Topologie. Man gebe einen Homöomorphismus von X auf Y an!