Übungen zu Analysis 2, 1. Übung 12. 3. 2013

1. Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$ und deren Konvergenzradiaus.

   Für welche x ($|x| < R$) kann mithilfe des Lagrange'schen Restgliedes auf die Konvergenz dieser Reihe gegen f geschlossen werden?

2. Betrachten Sie eine Potenzreihendarstellung von $1/(1+x)$ und begründen Sie damit, dass die Taylorreihe von Bsp. 1 für $|x| < 1$ gegen f konvergiert.

   Hinw.: Verwenden Sie den Satz aus der Vorlesung, wonach jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine im Inneren ihres Konvergenzkreises differenzierbare Funktion darstellt, deren Ableitung dort gleich $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ ist.

3. Bestimmen Sie $\sin(0,1)$ durch Taylorentwicklung und Lagrange'schem Restglied mit einem Fehler kleiner als 10^{-2}.

4. Stellen Sie $(\arctan x)'$ durch eine Potenzreihe dar und leiten Sie damit eine Potenzreihenentwicklung von arctan her. Wo konvergiert diese? Konvergiert sie im Inneren des Konvergenzintervalles $(-R, R)$ gegen arctan? Zeigen Sie damit:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

5. Zeigen Sie
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \qquad xy < 1$$
   indem Sie bei festem y zeigen, dass mit
$$F(x) := \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$
   $F(0) = 0$ und $F'(x) = 0$ für alle x gilt.

6. Finden Sie ein Intervall $[-\alpha, \alpha]$ in dem die Funktion $f(z) = \sqrt{1-z}$ durch ihr Taylorpolynom 2. Grades mit Fehler kleiner 10^{-5} approximiert wird.

7. Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(z) = \frac{2z^3}{4+z^5}$ um $z_0 = 0$ sowie deren Konvergenzradius.

   Hinw.: Verwenden Sie den Satz aus der Vorlesung, wonach jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine im Inneren ihres Konvergenzkreises differenzierbare Funktion darstellt, deren Ableitung dort gleich $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ ist, um zu zeigen, dass jede Potenzreiehe gleich der durch diese Funktion definierten Taylorreihe ist.

8. Sei für $x_1 < x_2$ f 2-mal differenzierbar in (x_1, x_2) und stetig auf $[x_1, x_2]$ mit $f''(z) \geq 0$ für $z \in [x_1, x_2]$. Dann gilt $f(z) \leq \frac{z-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x_2-z}{x_2-x_1} f(x_1)$.

   Hinweis: Zeigen Sie f' ist monoton und
$$\frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} = f'(\zeta_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z} = f'(\zeta_2), \quad \zeta_1 \leq \zeta_2.$$

9. Bestimmen Sie die lokalen und glabalen Maxima und Minima der Funktion $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2}$.

10. Bestimmen Sie das Maximum der Funktion

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

auf $\mathbb{R}$.