Übungen Analysis 2, 4. Übung 16. 4. 2013

1. Zeigen Sie:
$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$
und berechnen Sie damit über die Substitution $\tan\frac{x}{2} = u$ das Integral
$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

2. Existieren die uneigentlichen Integrale:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}}\, dx.$$
Hinw. zum 2. Int: $\int^x = \int^{[x]} + \int_{[x]}^x$.

3. Überprüfen Sie die Existenz folgender Integrale:
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{x \sin x}}\, dx.$$

4. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge (S_N):
$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \arctan n - \int_0^N \arctan x\, dx.$$
(Hinw. Mittelwertsatz)

5. Zeigen Sie dass der Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$
existiert. (Euler - Mascheroni Konstante $C = 0,57721...$)

6. Die n-te *Besselfunktion* ist durch
$$J_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\, dt$$
definiert. Zeigen Sie, dass sie Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung ist:
$$x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0.$$
(Hinw.: Integrieren Sie J_n' partiell, setzen sie in obige Differentialgleichung ein und integrieren Sie das verbleibende Integral durch Substitution.)

7. Berechnen Sie für $0 < a < b$

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx.$$

Hinw.: Betrachten Sie

$$\int_0^1 \int_a^b x^y \, dydx.$$

8. Für $x \in (0, +\infty)$ zeige man, dass folgendes uneigentliche Integral konvergiert:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \; dt.$$

Weiters zeige man, dass $\Gamma(x)$ stetig von x abhängt.

Hinweis: Sei $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$ fest. Man zeige, dass $f_n(x) := \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{x-1} \; dt$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[a, b]$ ist, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $\Gamma(x)$ konvergiert. Dazu zeige man, dass $|e^{-t} t^{x-1}| \le K_1 t^{a-1},\ t \in (0, 1]$ und $|e^{-t} t^{x-1}| \le K_2 \frac{1}{t^2},\ t \in [1, +\infty)$ mit irgendwelche Konstanten K_1, K_2.

Allgemeiner Tip, wie man $f(t) \le Cg(t)$ mit irgendeinem $C > 0$ für nicht negative stetige Funktionen f, g auf einem Intervall $[a, b)$ mit $g(t) \neq 0$ herleitet:

Gilt $\lim_{t \to b-} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$, so gibt es insbesondere zu $\epsilon = 1$ ein $t_0 \in [a, b)$, sodass $t \ge t_0 \Rightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \le 1$. Da die Funktion $\frac{f(t)}{g(t)}$ auf dem kompakten Intervall $[a, t_0]$ stetig ist, ist sie dort beschränkt, d.h. $\frac{f(t)}{g(t)} \le C$ für ein $C > 0$, das oBdA. auch $C \ge 1$ erfüllt. Also gilt $\frac{f(t)}{g(t)} \le C$ auf ganz $[a, b)$.

9. Man zeige für $x > 0,\ n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(n) = (n - 1)!.$$

10. Bestimmen Sie für die Funktion $\zeta(z) = \sqrt{1 - z}$ das Restglied des Taylorpolynoms um 0 n-ten Grades nach Lagrange sowie in Integraldarstellung. Geben Sie für die beiden Darstellugnen möglichst gute Abschätzungen f.d. Intervall $[0, 1]$. Wo konvergiert die Taylorreihe von ζ gegen ζ?