7. Übungen Analysis 2, 7. 5. 2013

1. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x-2y}{2x+y}$$

um $(1,-1)$.

2. Bestimmen Sie lokale und globale Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = (3x^2+2y^2)\exp(-x^2-2y^2).$$

3. Finden sie möglichst große Rechtecke $[a,b]\times[c,d]$ in denen die Niveaulinien $xy\exp(-x-y)=\gamma$ lokal als Funktionen $y(x)$ bzw. $x(y)$ dargestellt werden können.

4. Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$f(x,y,z) = z^5+2x^2y-2xz^2-y^3 = 0$$

lokal um $(1,1,1)$ z als differenzierbare Funktion von (x,y) gegeben ist und berechnen sie $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$ in $(1,1)$.

5. Zeigen Sie, dass durch die Gleichungen

$$x^2v+y\sin v+uv = 0$$
$$v\cos^3 x + x^2uv + u^2y - y = 0$$

lokal um $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,1,-1,0)$ u und v als Funktionen von x und y dargestellt werden können und berechnen Sie $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(1,1)$.

6. Funktionen $f_1,\dots,f_n$ von $\mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißen *über die Funktion H funktional abhängig*, wenn die Funktion H auf einer offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ definiert ist die den Wertebereich von $(f_1,\dots,f_n)^t$ umfasst, auf keiner offenen nichtleeren Teilmenge von Ω identisch verschwindet (d.h wenn H für keine offene nichtleere Teilmenge E von Ω $H(x)=0$ $\forall x\in E$ erfüllt) und $H(f_1(x),\dots,f_n(x)) = 0, \quad \forall x\in D$ erfüllt.

Zeigen Sie: Sind f_i, H C^1-Funktionen und die Funktionen f_i über die Funktion H funktional abhängig, so gilt $\det(d(f_1,\dots,f_n)(x)) = 0$ $\forall x\in D$.

—

Lösen Sie mithilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren die folgenden Extremwertaufgaben

7. Welcher Zylinder hat bei gegebenem Volumen minimale Oberfläche?

8. Stellen Sie die möglichen lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

unter den Nebenbedingunge

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^4 - y - z &= 1 \end{aligned}$$

als Lösungen polynomialer Gleichungen in einer Veränderlichen dar, d.h geben sie polynomiale Gleichungen in einer Veränderlichen für x, y, z.

9. Berechnen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy$$

auf dem abgeschlossenen Einheitskreis.