Analysis II Übung - Blatt 2, für den 25. 03. 2014

9. $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzungen des HS über implizite Funktionen, und sei zudem in C^2. Geben Sie eine Darstellung für

$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

an.

10. Wie Beispiel 9, aber jetzt $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$. Geben Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$$

an. Bsp 3 hilft beim Differenzieren der inversen Matrix.

11. (Gradient in Polarkoordinaten). Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Für $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi)$ definiere

$$u(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Stellen Sie (wo möglich) ∇f über ∇u (im entsprechenden Punkt) dar, d.h.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\ldots \frac{\partial u}{\partial r} + \ldots \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \ldots \frac{\partial u}{\partial r} + \ldots \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)$$

12. (Laplaceoperator in Polarkoordinaten) Wie zuvor, mit $f \in C^2$. Zeigen Sie

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Berechnen Sie Δf für $n \in \mathbb{Z}$ und $(r, \varphi) \in$?

$$f(x, y) = r^n \sin(n\varphi) \qquad f(x, y) = r^n \cos(n\varphi)$$

Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale. Geben Sie jeweils die möglichen Definitionsbereiche an. Beziehen Sie sich auf verwendete Sätze !

13. (a) $\int x^2 \sin x \, dx$
    (b) $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$
    (c) $\int x^\alpha \ln x \, dx$ (mit $\alpha \neq -1$)

14.

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2(x^3 - 1)} \, dx$$

15.

$$\int \frac{\cos x}{1 - 1/2\sin^2 x}\,dx$$

16. Bestimmen Sie das Riemann-Integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{für } f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0.5 \\ 1 & x \geq 0.5 \end{cases}$$

streng nach Definition 7.12.