Analysis II Übung - Blatt 5, für den 29. 04. 2014

33. Das n-te Legendrepolynom ist definiert als $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Sei

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(-1,1)} : C([-1,1])\times C([-1,1]) &\to \mathbb{R}\\ (f,g) &\mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx\end{aligned}$$

(das L_2-Skalarprodukt). Berechnen Sie

$$\langle P_n, P_m\rangle_{L_2(-1,1)} \qquad \text{für } n,m\in\mathbb{N}_0$$

Begründen Sie die Bezeichnung Orthogonalpolynome.

34. Es sei $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \varphi(x,y)/2 \le r(x,y) \le \varphi(x,y)\}$, wobei $r(x,y), \varphi(x,y)$ die Polarkoordinaten von (x,y) sind. Bestimmen Sie

$$|A| \qquad \text{und} \qquad \int_A x\, d(x,y).$$

35. Es sei $B(0,r) := \{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \le r\}$. Für welche $\alpha\in\mathbb{R}$ existiert

(a)
$$\lim_{\rho\to 0}\int_{B(0,1)\setminus B(0,\rho)} \sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha}\, d(x,y)$$

(b)
$$\lim_{\rho\to \infty}\int_{B(0,\rho)\setminus B(0,1)} \sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha}\, d(x,y)$$

36. Man berechne die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy \qquad \text{und} \qquad \int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx.$$

Warum ist hier Fubini nicht anwendbar ?

37. Man verwende das Integralkriterium (Satz 7.42) zur Klärung der Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$ für $\alpha < 0$.

38. Riemann-Stieltjes-Integral (Bem 8.12). Seien $u, v : [a,b]\to\mathbb{R}$. Falls $A\in\mathbb{R}$ existiert mit $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0 : \forall\, Z$ Zerlegung mit $|Z|<\delta\,\forall\,\sigma=(\xi_1,\dots\xi_m)$ Systeme von Zwischenpunkten so dass

$$\left|A - \sum_{k=1}^{m} u(\xi_k)(v(t_k)-v(t_{k-1}))\right| \le \varepsilon,$$

dann heißt u bezüglich v RS-integrierbar mit RS - Integral

$$A = \int_a^b u(t)dv(t).$$

Man zeige: Falls $u \in C([a,b])$, und $v \in C^1([a,b])$, dann gilt

$$\int_a^b u(t)dv(t) = \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

39. Es sei $u : [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig. Man bestimme für

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

das RS - Integral $\int_0^2 u(t)dv(t)$

40. Seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ und u bzgl. v als auch v bzgl u RS - integrierbar. Zeigen Sie die Rechenregeln

    (a) $\int_a^b 1\,dv(t) = v(b) - v(a)$

    (b) $\int_a^b u\,dv(t) + vdu(t) = \int_a^b 1d(uv)(t) = u(b)v(b) - u(a)v(a)$
    (partielle Integration)