Analysis II Übung - Blatt 6, für den 03. 05. 2014

41. Gegeben ist die Kurve C mit Parameterdarstellung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0,0) & t = 0 \\ \sqrt{t}\,(\cos(1/t), \sin(1/t)) & t > 0 \end{cases}$$

Ist γ stetig ? Ist C rektifizierbar ?

42. Ist die Parameterdarstellung aus Beispiel 41 stetig differenzierbar ? Ist die entsprechende Kurve stetig differenzierbar ?

43. Gegeben sei eine Kurve C als Graph in Polarkoordinaten:

$$r : \varphi \in [a,b] \mapsto r(\varphi)$$

Zeigen Sie, dass für $r(.) \in C^1$ die Länge der Kurve durch

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die Länge der Spiralkurve

$$r(\varphi) = \varphi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Skizzieren Sie die Kurve.

44. Gegeben sei das Vektorfeld f auf $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (2x - 2y, -2x + 3y^2)$$

Berechnen Sie direkt $\int_C f\, dx$, wobei C die Viertel-Kreiskurve mit Parameterdarstellung $\gamma : t \in [0, \pi/2] \mapsto (\cos t, \sin t)$ sei.

45. Überprüfen Sie mittels den Integrabilitätsbedingungen ob das VF aus Beispiel 44 eine Stammfunktion besitzt. Falls so, gehen Sie konstruktiv vor um eine zu bestimmen. Überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis aus Beispiel 44.

46. Gegeben sei das Vektorfeld f auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$:

$$f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Skizzieren Sie f. Berechnen Sie $\int_C f\, dx$ (direkt nach Definition), wobei die Kurve C jeweils über Ihre Parameterdarstellung

(a) $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$

(b) $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (2 + \cos\varphi, \sin\varphi)$

gegeben ist. Ist f ein Gradientenfeld ? Falls so, bestimmen Sie eine Stammfunktion.

47. Wie Beispiel 46, jetzt mit

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

48. Es sei A offen mit $[0,1]^2 \subset A$, $f \in C^1(A,\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\forall\, t \in [0,1] : \quad \frac{d}{dt} \int_0^1 f(x,t)\, dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx$$