Analysis II Übung - Blatt 9, für den 27. 05. 2014

65. Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer Rotationsfläche: Sei $\gamma : [a, b] \to (r, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ Parameterdarstellung einer stetig differenzierbaren Kurve. Die zugehörige Rotationsfäche S ist parametrisiert durch

$$\varphi : (u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi] \mapsto (\gamma_r(u) \cos v, \gamma_r(u) \sin v, \gamma_z(u))$$

Geben Sie eine allgemeine Formel für $I(S)$ an. Berechnen Sie die Oberfäche der von

$$\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (R + r \cos t, r \sin t)$$

erzeugten Rotationsfläche.

66. Sei $\varphi : K := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$. Bestimmen Sie

$$\int f \, d\sigma \qquad \text{für } \; f(x, y, z) = z.$$

67. Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ zulässig für den Gaußschen Integralsatz, $M \supset B$ offen, $u, v \in C^1(M, \mathbb{R}^3)$ und $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R})$. Zeigen Sie folgende Formeln der partiellen Integration:

(a)

$$\int_B u \cdot \nabla\varphi \, dx = -\int_B \varphi \operatorname{div} u \, dx + \int_{\partial B} \varphi u$$

(b)

$$\int_B \operatorname{rot} u \cdot v \, dx = \int_B u \cdot \operatorname{rot} v \, dx = \int_{\partial B} u \times v$$

Dabei sei ∂B so parametrisiert dass der Normalvektor nach außen zeigt. Hinweis: Für (b) betrachten Sie $\int_B \operatorname{div}(u \times v)$

68. Weisen Sie die Existenz eines Vektorpotentials nach: Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig bzgl. a. Sei $g \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} g = 0$. Definieren Sie für $x \in D$

$$f(x) := (x - a) \times \int_0^1 t g(a + t(x - a)) \, dt,$$

und weisen Sie $\operatorname{rot} f = g$ nach. Hinweis: analog zu Satz 8.22

69. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{div} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\partial Q_\varepsilon(x)} f \cdot n \, ds$$

mit $Q_\varepsilon(x) = [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \times [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]$, und n der nach außen gerichtete Einheitsnormalvektor (vgl. Bem 8.31).

70. Betrachten Sie auf $A = (0,1)^2$ die Vektorfunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} (1,0) & \text{für } x + y < 1 \\ (0,1) & \text{für } x + y \geq 1 \end{cases}$$

(Skizze!). Zeigen Sie dass der Grenzwert aus Beispiel 69 existiert, die Divergenz nach Definition $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ so nicht existiert.

71. Man zeige dass die Funktionen $E, H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} E(x,t) &= e \cos(k \cdot x - \omega t) \\ H(x,t) &= h \cos(k \cdot x - \omega t) \end{aligned}$$

unter passenden (welchen ?) Bedingungen an $e, h, k \in \mathbb{R}^3$ und $\omega \in \mathbb{R}$ die Maxwellschen Gleichungen in Vakuum

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} &= \operatorname{rot} H \\ \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} &= -\operatorname{rot} E \end{aligned}$$

erfüllen. Dabei sind $\mu_0 = 1.2566 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$ und $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ physikalische Konstanten. Man zeige dass für

$$x(t) = \frac{k}{\|k\|} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t$$

die Größen $E(x(t), t)$ und $H(x(t), t)$ konstant sind. Interpretation ?

72. Die Funktionen B, E seien stetig differenzierbare Lösungen der Maxwellgleichungen aus Bem 8.55. Zeigen Sie: Dann existiert ein Vektorpotential A welches die Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 I$$

erfüllt, und $B = \operatorname{rot} A$ und $E = -\frac{\partial A}{\partial t}$ lösen die Maxwellgleichungen.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst dass $\operatorname{div} I + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ gelten muss. Setzen Sie A als (nicht eindeutiges) Vektorpotential von B an, und korrigieren dieses später noch durch ein Skalarpotential.