# Gruppe A

**Beispiel 1**

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x^2-1)e^{-|x|} \end{array}$$

durch. Wo ist die Funktion stetig, wo ist sie differenzierbar? Wie ist das Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$? Bestimmen Sie Nullstellen und lokale/globale Extrema! Auf welchen Teilintervallen ist die Funktion monoton wachsend bzw. fallend? Fertigen Sie eine Skizze der Funktion.

`Lösung:` Die Funktion $f$ ist als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst stetig. Um das Grenzverhalten gegen $\pm\infty$ wird die Regel von de L'Hospital verwendet. Man überzeugt sich einfach, dass die Voraussetzungen dafür in jedem Schritt gewährleistet sind.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Da die Funktion $f$ symmetrisch ist gilt auch $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Um der Betragsfunktion beim Differenzieren aus dem Weg zu gehen, betrachtet man die Funktion $f$ einmal eingeschränkt auf $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$. Nach der Anwendung der Produktregel erhält man

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}(x^2-2x-1), & x > 0 \\ e^x(x^2+2x-1), & x < 0 \end{cases}$$

Die Funktionen $f$ ist jeweils eingeschränkt auf $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$ stetig differenzierbar (Verknüpfen von $C^1$ Funktionen). Bei 0 ist $f$ nicht differenzierbar, da

$$\lim_{x\to0-} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to0+} f'(x)$$

gilt. Nachdem die exp-Funktion niemals 0 wird muss man für Nullstellen von $f$ nur der Faktor $x^2-1$ betrachtet werden. Diesem Faktor sieht man unmittelbar die Nullstellen $\pm1$ an. Für die Nullstellen von $f'$ betrachtet man $x^2-2x-1$ wenn $x > 0$ und $x^2+2x-1$ wenn $x < 0$. Mit der Lösungsformel für Polynome zweiten Grades erhält man

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{2}, && x > 0 \\ x_{3,4} &= -1 \pm \sqrt{2}, && x < 0. \end{aligned}$$

Da immer nur eine der beiden Nullstellen im Definitionsbereich ist, erhält man $\pm(1+\sqrt{2})$ als Nullstellen für $f'$. Außerdem liest man der Darstellung

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}), & x > 0 \\ e^x(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}), & x < 0 \end{cases}$$

einfach ab, dass $f'$ in $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ positiv, in $(-1-\sqrt{2}, 0)$ negativ, in $(0, 1+\sqrt{2})$ positiv und in $(1+\sqrt{2}, +\infty)$ negativ ist. Damit ist $f$ bis $-1-\sqrt{2}$ wachsend, in $(-1-\sqrt{2}, 0)$ fallend, in $(0, 1+\sqrt{2})$ wachsend und ab $1+\sqrt{2}$ fallend. Noch dazu muss es sich deswegen bei $\pm(1+\sqrt{2})$ um lokale Maxima und bei 0 um ein lokales Minima handeln. 0 ist sogar eine ein globales Minima, da $f$ außerhalb von $[-1,1]$ positiv ist und in $[-1,0)$ fallend und in $(0,1]$ wachsend ist. Auch $\pm(1+\sqrt{2})$ sind globale Extrema, da $1+\sqrt{2}$, wegen der Monotonieüberlegungen ein globales Maxima von $f\big|_{\mathbb{R}+}$ ist und $f$ symmetrisch ist.

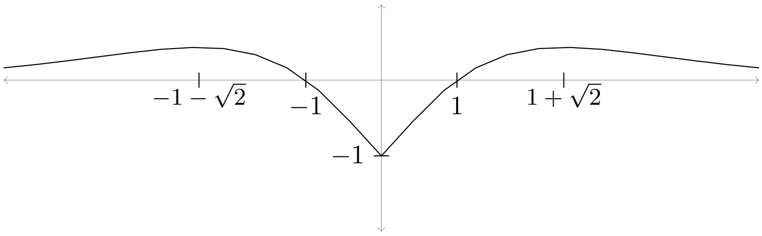


Abbildung 1: Skizze von $f$

**Beispiel 2**

Berechnen Sie

$$I := \int\limits_2^{+\infty} \left( \frac{1}{t^2+2t-3} + \exp(-2|t-3|) \right) \mathrm{d}t.$$

<u>`Lösung:`</u> Zuerst nützt man die Linearität des Integrals und spaltet es in

$$\underbrace{\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t-3} \,\mathrm{d}t}_{:=I_1} + \underbrace{\int\limits_2^{+\infty} \exp(-2|t-3|) \,\mathrm{d}t}_{:=I_2}.$$

Nun berechne man $I_1$ und $I_2$ separat:

- Für den Integrand $\frac{1}{t^2+2t-3}$ von $I_1$ macht man eine Partialbruchzerlegung, indem man zu nächst die Nullstellen des Nenners mit Hilfe der Lösungsformel für Polynome zweiten Grades berechnet.

  $$\frac{1}{t^2+2t-3} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-1}$$

  Das ergibt das Gleichungssystem

  $$\underbrace{(A+B)}_{=0} t + \underbrace{3B-A}_{=1} = 0t+1$$

  Somit erhält man $A = -\frac{1}{4}$ und $B = \frac{1}{4}$. Unter Verwendung, dass $\log(x)$ die

Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist erhält man

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{4} \lim_{R\to+\infty} \left( \int_2^R \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \int_2^R \frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{4} \lim_{R\to+\infty} \big( \log(R-1) - \log(1) - \log(R+3) + \log(5) \big) \\
&= \frac{1}{4} \left( \log(5) + \lim_{R\to+\infty} \log\left(\frac{R-1}{R+3}\right) \right).
\end{aligned}
$$

Da log stetig ist lässt sich der Grenzwert in das Argument des log hineinziehen. Der Bruch $\frac{R-1}{R+3} = \frac{1-\frac{1}{R}}{1+\frac{3}{R}}$ konvergiert für $R \to +\infty$ gegen 1 und $\log(1) = 0$. Insgesamt ergibt das

$$I_1 = \frac{1}{4}\log(5).$$

- Um die sich die Betragsfunktion zu ersparen teilt man $I_2$ in

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_2^3 \exp(-2(3-t))\,\mathrm{d}t + \int_3^{+\infty} \exp(-2(t-3))\,\mathrm{d}t \\
&= \exp(-6)\int_2^3 \exp(2t)\,\mathrm{d}t + \exp(6)\lim_{R\to+\infty}\int_3^R \exp(-2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1-\exp(4-6)}{2} + \frac{1}{2} - \exp(6)\lim_{R\to+\infty}\frac{\exp(-2R)}{2}.
\end{aligned}
$$

Da $\exp(-2R)$ für $R \to +\infty$ gegen 0 konvergiert, erhält man

$$I_2 = 1 - \frac{\exp(-2)}{2}.$$

Nun ist $I$ die Summe von $I_1$ und $I_2$

$$I = 1 - \frac{\exp(-2)}{2} + \frac{\log(5)}{4}.$$