Übungsblatt 2 für Analyse von Algorithmen (17.10.2012)

6.) Man zeige folgende Eigenschaft: Sei $g(x)$, $x \geq 1$, eine Riemann-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass

$$c_1 g(x) \leq g(u) \leq c_2 g(x) \qquad \text{für } x \geq 1/b \text{ und für alle } u \text{ mit } bx \leq u \leq x,$$

für ein b mit $0 < b < 1$ gilt. Dann gibt es für jede reelle Zahl α Konstanten $c_3, c_4 > 0$ mit

$$c_3 g(x) \leq x^\alpha \int_{bx}^{x} \frac{g(u)}{u^{\alpha+1}}\, du \leq c_4 g(x) \qquad \text{für alle } x \geq 1/b.$$

7.) Man formuliere eine diskrete Version des Satzes von Akra-Bazzi.

8.) Der **Karatsuba-Algorithmus** zur Multiplikation zweier ganzer Zahlen $x = (x_n \cdots x_1)_2$, $y = (y_n \cdots y_1)_2$ (im Binärsystem) basiert auf folgender Idee. Man schreibt x und y in der Form $x = x' + 2^m x''$ und $y = y' + 2^m y''$ mit $m = \lfloor n/2 \rfloor$. und berechnet $A = x'y'$, $B = x''y''$ und $C = (x' + x'')(y' + y'')$. Dann gilt

$$x \cdot y = A + 2^m (C - A - B) + 2^{2m} B.$$

Man gebe eine obere Abschätzung für den Aufwand des Karatsuba-Algorithmus an, wobei der Aufwand in der Anzahl der elementarem Rechenoperationen (von 0 und 1) berechnet werden soll?

9.) Wie ist das asymptotische Verhalten der Lösung der Divide-and-Conquer-Rekursion

$$T(x) = 2T(x/2) + \frac{8}{9} T(3x/4) + \Theta(x^2 / \log x) \quad ?$$

10.) Wie ist das asymptotische Verhalten der Lösung der Divide-and-Conquer-Rekursion

$$T(x) = 2T(x/4) + 3T(x/6) + \Theta(x \log x / \log\log x) \quad ?$$