Übungsblatt 4 für Analyse von Algorithmen (31.10.2012)

16.) Auffinden des j-größten Elements aus $x[1], \ldots, x[n]$. (Quickselect)

Anmerkung: Quickselect funktioniert nach dem Prinzip von Quicksort, d.h. in der Partitionierungsphase wird ein zufällig gewähltes Element durch Vergleiche mit den übrigen Elementen an die richtige Position gebracht, sodaßsich anschließend links vom Pivotelement nur Elemente kleiner und rechts vom Pivotelement nur Elemente größer als das Pivotelement befinden. Danach wird untesucht, ob das Pivotelement bereits das gesuchte Element darstellt und gegebenenfalls dieses zurückgegeben. Falls dies nicht der Fall ist, wird anschließend nur in einem Teilfeld, in dem sich das gesuchte Element befinden muß, rekursiv weitergesucht.

Begründen Sie für die mittlere Anzahl $D_{n,j}$ der rekursiven Aufrufe (= Durchläufe) von Quickselect die Rekursion

$$D_{n,j} = 1 + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{j-1} D_{n-k,j-k} + \sum_{k=j+1}^{n} D_{k-1,j}\right) \quad \text{für } n \geq j \geq 1\,.$$

Setzen Sie sodann $D_{n,j} = H_j + H_{n+1-j} - 1$ ein und sehen Sie, daß die Formel stimmt.

17.) Die mittlere Anzahl $C_{n,j}$ der Vergleiche bei Quickselect ist durch folgende Formel gegeben (brauchen Sie nicht zeigen):

$$C_{n,j} = 2\left[(n+1)H_n - (n+3-j)H_{n+1-j} - (j+2)H_j + n + 3\right]\,.$$

Auffinden des Medians: Setze $n = 2N+1$, $j = N+1$. Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten für $N \to \infty$.

18.) Gegeben sei die folgende Inversionstafel von $\pi : (4, 2, 3, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$. Geben Sie die kanonische Zyklendarstellung von π an.

19.) Skizzieren Sie einen Algorithmus, um aus einer Inversionstafel zur entsprechenden Permutation zu gelangen. (Abarbeitung der Inversionstafel von vorne.)

20.) $I_n(k)$ sei die Anzahl der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit k Inversionen. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
&I_n(k) = I_n(k-1) + I_{n-1}(k) \quad \text{für } k < n, \\
&\sum_k I_n(k) = n!, \\
&\sum_k I_n(k) z^k = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \cdots + z^k), \\
&\sum_k (-1)^k I_n(k) = 0, \quad n \geq 2, \\
&\sum_k k I_n(k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} n!.
\end{aligned}$$