

Übungsblatt 7 für Analyse von Algorithmen (21.11.2012)

31.) Mittlere interne Pfadlänge in Digitalen Suchbäumen.

Wie bei Tries sind den Daten 0 – 1-Folgen zugeordnet. Wie bei binären Suchbäumen werden die Daten der Reihe nach als interne Knoten eingetragen, wobei man, falls ein Knoten schon besetzt ist, nach links (0) bzw. rechts (1) verzweigt, und dafür fortlaufend die Bits verwendet.

- (a) Man betrachte ein selbstgewähltes Beispiel mit 5 Daten und konstruiere den Digitalen Suchbaum.
- (b) Zeigen Sie für die mittlere Interne Pfadlänge A_n von Digitalen Suchbäumen mit $n \geq 1$ Daten:

$$A_n = n - 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{1-n} \binom{n-1}{k} (A_k + A_{n-1-k}).$$

32.) Fortsetzung von Bsp. 31.):

- (a) Sei

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{z^n}{n!}.$$

Zeige:

$$A'(z) = ze^z + 2e^{\frac{z}{2}} A\left(\frac{z}{2}\right).$$

- (b) Setze $B(z) = e^{-z} A(z)$. Zeige

$$B'(z) + B(z) = z + 2B\left(\frac{z}{2}\right).$$

33.) Fortsetzung von Bsp. 32.):

- (a) Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Zeige:

$$B_n = -(1 - 2^{2-n})B_{n-1}, \quad \text{für } n \geq 3$$

bzw.

$$B_n = (-1)^n Q_{n-2} \quad \text{mit} \quad Q_n = \prod_{1 \leq j \leq n} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right).$$

(b) Daraus folgere man:

$$A_n = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^k Q_{k-2}.$$

34.) Man zeige die ABELsche Umformung:

$$\sum_{1 \leq k \leq N} a_k b_k = a_N \sum_{1 \leq k \leq N} b_k - \sum_{1 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k) \sum_{1 \leq i \leq k} b_i$$

und mit deren Hilfe berechne man $\sum_{1 \leq k < n} \binom{k}{m} H_k$.

35.) Man zeige

$$[z^n] \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} \log \frac{1}{1-z} = \binom{n+\alpha}{n} (H_{n+\alpha} - H_\alpha).$$