Übungsblatt 8 für Analyse von Algorithmen (28.11.2012)

36.) Sei $t \in \mathbb{Z}$ ein Parameter. Die gewöhnliche erzeugende Funktion $y(z)$ sei implizit definiert durch die Gleichung

$$y^{1-t} - y^{-t} = z\,.$$

Substituieren Sie

$$z = \frac{u}{(1+u)^t}$$

und zeigen Sie mit der Cauchy'schen Integralformel, dass für $r \in \mathbb{N}$

$$y^r = \sum_{k\ge 0} \binom{tk+r}{k} \frac{r}{tk+r} z^k\,.$$

und

$$\frac{y^r}{1-t+\frac{t}{y}} = \sum_{k\ge 0} \binom{tk+r}{k} z^k$$

gilt.

37.) Ein ebener Wurzelbaum besteht aus einem Wurzelknoten, wo eine Folge von beliebig vielen Unterbäumen (ergo, die links-rechts-Reihenfolge der Unterbäume ist wichtig), die selbst wiederum ebene Wurzelbäume sind, dranhängen.

(a) Wie viele ebenen Wurzelbäume mit n Knoten gibt es?

(b) Man interpretiere ebene Wurzelbäume als Gitterpfade, indem man, bei der Wurzel startend, um den Baum herumfährt und einen Abwärtsschritt als $\nearrow$ und einen Aufwärtsschritt als $\searrow$ zeichnet. Man betrachte ein repräsentatives Beispiel. Was haben diese Pfade für Eigenschaften?

(c) Man bestimme die Anzahl der Gitterpfade von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, die nie unterhalb der x-Achse sind und die Anzahl der Gitterpfade von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, die oberhalb der x-Achse sind und nur bei $(0,0)$ und $(2n,0)$ die x-Achse treffen.

38.) Sei $G(z)$ eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion. Die sogenannten Semi-Invarianten oder Kumulanten κ_n, $n \ge 1$ sind definiert durch

$$\sum_{n\ge 1} \kappa_n \frac{t^n}{n!} = \ln G(e^t), \quad \text{also} \quad \kappa_n = \frac{d^n}{dt^n} \ln G(e^t)\bigg|_{t=0}\,.$$

Es gilt also beispielsweise $\kappa_1 = G'(1)$, $\kappa_2 = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

Sei nun $F(z)$ definiert mittels $F(z) := z^m G(z)$ für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\tilde{\kappa}_n$ die entsprechenden Semi-Invarianten. Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen den κ_n und den $\tilde{\kappa}_n$?

39.) Falls für eine Diskrete Zufallsvariable X gilt, dass für alle $k \geq 0$: $\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$, dann heisst X Poisson-verteilt mit Parameter μ. Man berechne nun die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G(z) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{X = k\} z^k$ und berechne weiters die im vorigen Bsp. definierten Semi-Invarianten κ_n.

40.) Zeigen Sie: Für $|k| \geq n^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ gilt

$$\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \mathcal{O}\left(e^{-n^{2\epsilon}}\right) .$$

Dazu kann man beispielsweise die Beziehung

$$\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)} = \left(1 - \frac{k}{n+k}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \leq \left(1 - \frac{k}{n+k}\right)^k$$

benutzen.