Übungsblatt 9 für Analyse von Algorithmen (5.12.2012)

41.) Man zeige, dass die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{k\ge 1} k^{-s}$ für $\Re(s) > 1$ konvergiert und zeige, dass sie in jedem Punkt s_0 mit $\Re(s_0) > 1$ eine konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\zeta(s) = \sum_{n\ge 0} a_n (s-s_0)^n \qquad (|s-s_0| < R, \quad R = R(s_0) > 0)$$

besitzt.
Hinweis: Man entwickle k^{-s} zuerst in eine Potenzreihe.

42.) Man zeige für $\Re(s) > 1$ die Identität

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,dx.$$

Weiters zeige man, dass das Integral auf der rechten Seite eine Funkion in s darstellt, die für $\Re(s) > 0$ konvergiert und wieder in jedem Punkt s_0 mit $\Re(s_0) > 0$ eine konvergente Potenzreihenentwicklung besitzt.

43.) Es seien $A(s) = \sum_{k\ge 1} a_k k^{-s}$ und $B(s) = \sum_{k\ge 1} b_k k^{-s}$ zwei Dirichletsche Reihen mit Koeffizieten a_k bzw. b_k, die für $\Re(s) > \sigma_0$ absolut konvergieren. Für welche Koeffizienten c_k ist das Produkt $C(s) = A(s)B(s)$ Dirichletsche Reihe?
Man wende das insbesondere auf $A(s) = B(s) = \zeta(s)$ an.

44.) Sei eine Zufallsgröße X mit Werten in $\mathbb{N}_{\ge 1}$ gegeben, sowie $p_k = \mathbb{P}\{X = k\}$ und $P(z) = \sum_{k\ge 1} \frac{p_k}{k^z}$:

(a) Drücken Sie $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(\log X)$ durch $P(z)$, $P'(z)$, etc. aus.

(b) Sei $Q(z) = \sum_{k\ge 1} \frac{q_k}{k^z}$ mit $q_k = \mathbb{P}\{Y = k\}$. X und Y seien unabhängig.
Was ist die erzeugende Funktion von $X \cdot Y$? Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}(X\cdot Y) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y),$$
$$\mathbb{V}(X\cdot Y) = (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2)(\mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y)^2.$$

Drücken Sie diese Größen durch P und Q aus!

45.) Es sei A ein Algorithmus gegeben, der zwei Polynome von Graden m und n (über $\mathbb{C}$) in $O((m+n)\log(m+n)$ Rechenoperationen (= Multiplikationen komplexer Zahlen) multipliziert. (Dabei werden die Polynome durch ihre Koeffizienten beschrieben).

Man entwickle daraus einen Algorithmus, der zwei natürliche Zahlen *schnell* multipliziert. (Die natürlichen Zahlen sind z.B. im Binärsystem gegeben und haben m bzw. n Ziffern.)