Übungsblatt 6 für "Analyse von Algorithmen"

26.) Bei der Analyse von Hashing mit Linear Probing trat folgende Summe auf (mit $n \in \mathbb{N}$):

$$S(n,x,y) := (y-n) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+k)^{k+1} (y-k)^{n-k-1}.$$

Man zeige nun folgende Rekursion für $S(n,x,y)$:

$$S(n,x,y) = x(x+y)^n + nS(n-1, x+1, y-1), \text{ für } n \geq 1, \quad S(0,x,y) = x.$$

Daraus folgere man:

$$S(n,x,y) = \sum_{k=0}^{n} (x+k) n^{\underline{k}} (x+y)^{n-k}.$$

Anmerkung: Abels's Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes erweist sich als nützlich.

27.) Man berechne den folgenden Ausdruck, der bei der Varianz der Anzahl der Vergleiche in einer Hashing-Variante eine Rolle spielt:

$$\sum_{k_1 + \dots k_M = N} \binom{N}{k_1, \dots, k_M} \left(\binom{k_1}{2} + \dots + \binom{k_M}{2} \right)^2 .$$

Anleitung: Verwenden Sie das Multinomialtheorem, sowie

$$\binom{k}{2}^2 = \frac{k^{\underline{4}}}{4} + k^{\underline{3}} + \frac{k^{\underline{2}}}{2} .$$

28.) Ramanujan's Q-Funktion sei definiert durch

$$Q(n) := \sum_{k \geq 0} \frac{(n-1)^{\underline{k}}}{n^k} .$$

Man zeige für natürliche Zahlen n:

$$1 + Q(n) = \int_0^\infty e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx .$$

29.) Man betrachte

$$\tilde{Q}(m,n) = \sum_{k\geq 0} \frac{n^{\underline{k}}}{m^k}.$$

Man setze $n = \alpha m$, mit $0 < \alpha < 1$ und studiere das asymptotische Verhalten von $\tilde{Q}(m, \alpha m)$ für $m \to \infty$.
Anleitung: Zeigen (beispielsweise durch Induktion) und verwenden Sie

$$n^k - \binom{k}{2} n^{k-1} \leq n^{\underline{k}} \leq n^k.$$

30.) Das Parkproblem: eine Einbahnstraße besitze m in einer Reihe angeordnete Parkplätze, die von 1 bis m numeriert sind. Ein Mann fährt mit seiner im Auto eingeschlafenen Frau die Einbahnstraße entlang, plötzlich wacht die Frau auf und weist den Mann an, ehestmöglich zu parken. Daraufhin versucht er an der ersten freien Stelle zu parken, aber falls kein freier Parkplatz mehr verfügbar ist (also wenn beim Aufwachen der Frau Platz k erreicht ist, aber $k, k+1, \ldots, m$ besetzt sind), beschließt er, nicht verkehrswidrig zu parken, sondern weiterzufahren. Wir nehmen nun an, dies geschieht für n verschiedene Autos, wobei die j-te Frau beim Parkplatz a_j aufwacht. Wie viele Folgen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1, \ldots, m\}^n$ gibt es dann, wo alle Autos geparkt werden können, unter der Voraussetzung, daß die Straße zu Beginn leer ist und keines der geparkten Autos wieder weggefahren wird?

Hinweis: es gibt einen einfachen Zusammenhang mit einer "Hilfsgröße", die bei der Analyse von Hashing mit Linear Probing studiert wurde.