Übungsblatt 7 für “Analyse von Algorithmen”

31.) Alternative Herleitung von Abel's Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k}\,.$$

Anleitung: Definiere $a_0(x,z) = 1$, $a_k(x,z) = \frac{x(x-kz)^{k-1}}{k!}$ für $k \geq 1$.

(a) Zeige

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} a_k(x,z) = a_{k-j}(x-jz,z)\,.$$

(b) Man fasse z stets als Parameter auf. Jedes Polynom $P(x)$ vom Grad $\leq n$ läßt sich somit eindeutig schreiben als $P(x) = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n$. Man zeige nun

$$P^{(j)}(jz) = \left(\frac{d^j}{dx^j} P(x)\right)\bigg|_{x=jz} = \lambda_j\,.$$

(c) Wende die Darstellung

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(kz) a_k(x,z)$$

auf das Polynom $(x+y)^n$ an.

32.) Man definiert die Anzahl der “runs” einer Folge $a_1,\ldots,a_n$ durch:
eine Folge hat k runs $\Longleftrightarrow$ es gibt genau $k-1$ Indizes $1 \leq j < n$ mit $a_j > a_{j+1}$.

Dieser Parameter tritt bei der Analyse bestimmter Sortieralgorithmen auf, weil runs die sortierten Segmente eines Feldes repräsentieren.

Man zeige nun: unter allen 2^n Folgen $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \{0,1\}^n$ gibt es $\binom{n+1}{2k-1}$ Folgen mit genau k runs.

Hinweis: man betrachte die (alternierenden) 0-Blöcke und 1-Blöcke.

33.) Sei $a_1a_2\ldots a_n$ eine zufällige Permutation von $\{1,2,\ldots,n\}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von

$$|a_1-1| + |a_2-2| + \cdots + |a_n-n|.$$

Anmerkung: diese Größe tritt ebenfalls bei der Analyse von Sortieralgorithmen auf.

34.) Beweisen Sie folgenden Zusammenhang zwischen der Internen Pfadlänge $I(t)$ und der Externen Pfadlänge $E(t)$ eines Binärbaums t:

$$E(t) = I(t) + 2|t|.$$

Hinweis: Induktion nach der Größe $|t|$ des Binärbaums.

35.) Betrachten Sie Binäre Suchbäume mit N gespeicherten Daten. Sei $P_{N,k}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Eintragung k Schritte benötigt. Zeigen Sie:

(a) $c'_{N-1} = \sum kP_{N,k}$

(b) $NP_{N,k} = 2P_{N-1,k-1} + (N-2)P_{N-1,k}$

(c) Sei $P_N(z) = \sum_{k\geq 0} P_{N,k}z^k$. Zeigen Sie

$$P_N(z) = \prod_{2\leq j\leq N} \frac{2z+j-2}{j}\,.$$

Hieraus bestimme man Erwartungswert und Varianz.