Übungsblatt 10 für "Analyse von Algorithmen"

46.) Sei eine Zufallsgröße X mit Werten in $\mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeben, sowie $p_k = \mathbb{P}\{X = k\}$ und $P(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{p_k}{k^z}$:

(a) Drücken Sie $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(\log X)$ durch $P(z)$, $P'(z)$, etc. aus.

(b) Sei $Q(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{q_k}{k^z}$ mit $q_k = \mathbb{P}\{Y = k\}$. X und Y seien unabhängig. Was ist die erzeugende Funktion von $X \cdot Y$? Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y), \\ &\mathbb{V}(X \cdot Y) = (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2)(\mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y)^2. \end{aligned}$$

Drücken Sie diese Größen durch P und Q aus!

47.) Sei

$$P(z) = \sum_{n\geq 1} P_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2}$$

die erzeugende Funktion der Anzahl P_n der ebenen Wurzelbäume mit n Knoten. Man bestimme die Koeffizienten $[z^n]$ von $P(z)^r$, für $r \in \mathbb{N}$.

48.) (a) Bei der sogenannten "Sequentiellen Suche" nach einem Datum mit Schlüssel K in einem Feld mit Schlüsseln $K_1, \ldots, K_n$ werden sukzessive $K_1, K_2, K_3, \ldots$ mit K verglichen, bis $K_i = K$ (erfolgreicher Fall) oder festgestellt wurde, daß $K_i \neq K$ für alle $1 \leq i \leq n$ (erfolgloser Fall). Man bestimme den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl an Vergleichen, die bei der Sequentiellen Suche zum Aufsuchen eines Datums in einem Feld der Größe n im erfolgreichen Fall gemacht werden, wobei vorausgesetzt wird, daß die Felder $K_1, \ldots, K_n$ zufällige Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ sind.

(b) Eine Technik bei sogenannten "self-organizing lists" besteht darin, im Anschluß an eine erfolgreiche Suche nach einem Datum dieses an den Anfang der Liste zu bringen. Es gilt nun (ohne Beweis) unter der Voraussetzung, daß die N Schlüssel mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_N$ auftreten und daß die Suchen völlig unabhängig von den vorhergehenden durchgeführt werden, daß die durchschnittliche Anzahl an Vergleichen um im erfolgreichen Fall ein Datum in einer "self-organizing list" der Größe N zu finden gegen den nachfolgend angegebenen Wert $\bar{C}_N$ strebt:

$$\bar{C}_N = \frac{1}{2} + \sum_{1\leq i,j\leq N} \frac{p_i p_j}{p_i + p_j}.$$

Man bestimme nun $\bar{C}_N$ für folgende Verteilung der Schlüssel: $p_i = \frac{1}{N}$, für $1 \leq i \leq N$.

49.) Seien $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ die n möglichen Coupons, welche mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$ gezogen werden können. In der Vorlesung haben wir die folgende Formel für die erwartete Anzahl an Ziehungen E_m, um m (verschiedene) Coupons, wo jedes (zumindest) k-fach erhalten werden soll, hergeleitet:

$$E_m = \sum_{q=0}^{m-1} \int_0^\infty [u^q] \left(\prod_{i=1}^{n} \Big(e_{k-1}(p_i t) + u\big(e^{p_i t} - e_{k-1}(p_i t)\big)\Big) \right) e^{-t} dt,$$

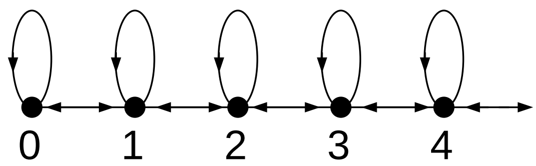
wobei $e_k(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!}$ die abgeschnittene Exponentialreihe ist.

Durch Einsetzen und Vereinfachen zeige man die bekannten Formeln für folgende Spezialfälle:

(a) **Klassisches Coupon-Sammelproblem**
Setze $m = n$ und $k = 1$, sowie $p_i = \frac{1}{n}$, für $1 \le i \le n$. Dies liefert schließlich $E_n = nH_n$

(b) **Geburtstagsparadoxon**
Setze $m = 1$ und $k = 2$, sowie $p_i = \frac{1}{n}$, für $1 \le i \le n$. Dies liefert schließlich $E_1 = 1 + Q(n)$, mit $Q(n)$ Ramanujan's Q-Funktion.

50.) Eine Anwendung der "kernel-Methode": sogenannte Motzkin-Pfade. Betrachten wir folgenden unendlichen gerichteten Graphen mit Knotenmenge $V = \mathbb{N}$ und Kantenmenge $E = \{(i, i+1) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{(i, i) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{(i, i-1) : i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.



Wir betrachten nun die Anzahl $F_{n,k}$ der möglichen Kantenfolgen der Länge n (die also aus n Kanten bestehen), die im Knoten 0 beginnen und im Knoten k enden. Insbesondere sind wir an $F_n := F_{n,0}$ interessiert.

(a) Man begründe, warum die Anzahlen $F_{n,k}$ folgende Rekursion erfüllen:

$$\begin{aligned} F_{n,k} &= F_{n-1,k-1} + F_{n-1,k} + F_{n-1,k+1}, \quad n \ge 1, k \ge 1, \\ F_{n,0} &= F_{n-1,0} + F_{n-1,1}, \quad n \ge 1, \\ F_{0,k} &= \delta_{k,0}. \end{aligned}$$

(b) Man weise nach, dass die erzeugende Funktion $F(z, u) := \sum_{n \ge 0} \sum_{k \ge 0} F_{n,k} z^n u^k$ folgende Gleichung erfüllt:

$$-F(z,u)\big(zu^2 + (z-1)u + z\big) = u - zF(z,0).$$

(c) Durch Auslöschen des "kernels" in obiger Gleichung erhält man schließlich die gesuchte erzeugende Funktion

$$F(z,0) = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}.$$

Anmerkung: Koeffizientenablesen von obigem Ausdruck ist nicht mehr verlangt, da für die Anzahl der Motzkin-Pfade keine schöne summenfreie Darstellung existiert.