

Klassische Differentialgeometrie (104.469)  
Übungsblatt für den 21.3.2017

9. Sei  $(\gamma, N)$  ein Streifen für die Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{N} := N \cos \phi + B \sin \phi$ , wobei  $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist und  $B = T \times N$ .

Zeigen Sie, dass  $(\gamma, \tilde{N})$  ein Streifen ist und berechnen Sie, wie sich die Krümmungen  $\kappa_n, \kappa_g$  und die Torsion  $\tau$  beim Wechsel von  $(\gamma, N)$  zu  $(\gamma, \tilde{N})$  ändern.

10. Sei  $(\gamma, N)$  ein Streifen für die Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \psi$  eine Reparametrisierung von  $\gamma$ , also  $\psi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  mit  $\psi' \neq 0$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $(\tilde{\gamma}, \tilde{N})$  mit  $\tilde{N} = N \circ \psi$  ein Streifen ist.

(b) Wie ändern sich die Krümmungen  $\kappa_n, \kappa_g$  und die Torsion  $\tau$  beim Wechseln von  $(\gamma, N)$  zu  $(\tilde{\gamma}, \tilde{N})$ ?

11. Sei  $\gamma : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Parametrisierung einer Gerade, also  $\gamma' \times \gamma'' = 0$ , und sei  $F$  ein angepasster Rahmen für  $\gamma$ .

Zeigen Sie, dass  $\kappa_n = 0 = \kappa_g$  und finden Sie ein Einheitsnormalenfeld  $N$  so, dass  $\tau = 1$ .

12. Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\mapsto \left( t, t^2, \frac{2t^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Bogenlänge von  $\gamma$ .

Finden Sie ein Normalenfeld  $N$  für  $\gamma$  und berechnen Sie bei  $t = 0$  Normalkrümmung, geodätische Krümmung und Torsion mit Hilfe der Beziehungen

$$\kappa_n = -(N', T), \quad \kappa_g = -(T', B), \quad \tau = (N', B).$$

13. Beweisen Sie:

Eine bogenlängenparametrisierte Kurve  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann eben, wenn es einen angepassten Rahmen mit  $\kappa_g = 0 = \tau$  gibt.

Gilt die gleiche Aussage auch für  $\kappa_n = 0 = \tau$  und für  $\kappa_n = 0 = \kappa_g$ ?