

## Übungsblatt 2

1. *Konstruktion einer bivariaten Normalverteilung mit vorgegebener Korrelation:*

Seien  $U, V \sim \mathcal{N}(0, 1)$  unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Gegeben sei der Wert  $\rho \in [-1, 1]$  und definiere  $W := \sqrt{1 - \rho^2}U + \rho V$ .

(a) Zeige, dass  $(V, W)$  bivariat normalverteilt ist,  $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und  $\text{Cov}(V, W) = \rho$ .

(b) Seien  $\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}$  und  $\sigma_X, \sigma_Y \in [0, \infty)$ . Definiere  $X := \mu_X + \sigma_X V$  und  $Y := \mu_Y + \sigma_Y W$ . Zeige, dass  $(X, Y)$  bivariat normalverteilt ist,  $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  und  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ , und für den Korrelationskoeffizient  $\text{Corr}(X, Y) = \rho$  gilt.

2. Seien  $X$  und  $Z$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und

$$\mathbb{P}[Z = 1] = \mathbb{P}[Z = -1] = \frac{1}{2}$$

Definiere die Zufallsvariable  $Y := ZX$  und zeige, dass  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , aber  $(X, Y)$  nicht normalverteilt ist.

3. Berechne die charakteristischen Funktionen der Binomial-, der negativen Binomial- und der Poissonverteilung.

4. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$  binomialverteilt mit Parametern  $n \in \mathbb{N}$  und  $p_n \in [0, 1]$ . Gelte noch zusätzlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$  für ein  $\lambda \in (0, \infty)$ .

Zeige mit Hilfe von charakteristischen Funktionen, dass die Folge der Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in Verteilung gegen eine poissonverteilte Zufallsvariable  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  mit Parameter  $\lambda$  konvergiert.

*Hinweis: Verwende den Stetigkeitssatz von Lévy.*

### Stetigkeitssatz von Lévy.

Eine Folge von Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsvariable  $X$ , d.h.  $X_n \xrightarrow{d} X$ , genau dann, wenn  $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.