Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle SS 2012

Übungsblatt 1

1. Sei Ω eine Menge, I eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf Ω. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω ist.

2. Sei Ω eine Menge. Zeigen Sie, dass für jedes System $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ aus Teilmengen von Ω eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ existiert, die $\mathcal{E}$ enthält, d.h. $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ und für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

3. Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei Messräume und $X : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
   (i) $\sigma(X) := \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}'\}$ ist eine σ-Algebra.
   (ii) X ist genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, falls $\sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$ gilt.
   (iii) $\sigma(X)$ ist die kleinste σ-Algebra, für die die Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ messbar ist.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:
   (i) $\{X \leq a\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ für alle $a \in \mathbb{R}$
   (ii) $\{X < a\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$ für alle $a \in \mathbb{R}$

5. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Man nennt $A \in \mathcal{F}$ ein Atom von $\mathcal{F}$, wenn $A \neq \emptyset$ ist und für jedes $B \in \mathcal{F}$ mit $B \subseteq A$ entweder $B = \emptyset$ oder $B = A$ gilt.
   Im Folgenden sei $\mathcal{F}$ eine endliche σ-Algebra auf $\Omega \neq \emptyset$ und bezeichne $\mathcal{A}$ die Menge aller Atome von $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:
   (i) Für alle $\omega \in \Omega$ ist $A_\omega := \bigcap\{B | B \in \mathcal{F}, \omega \in B\}$ ein Atom von $\mathcal{F}$, dass ω enthält.
   (ii) $\mathcal{A}$ ist eine Partition von Ω, d.h. $\Omega = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ und für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \neq B$ gilt $A \cap B = \emptyset$.
   (iii) Für jedes $B \in \mathcal{F}$ gilt $B = \bigcup\{A | A \in \mathcal{A}, A \subseteq B\}$.

6. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum mit einer endlichen σ-Algebra $\mathcal{F}$ und bezeichne $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ die Menge aller Atome von $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ genau dann messbar bzgl. $\mathcal{F}$ ist, wenn sich X darstellen lässt als $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit gewissen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^d$,