Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle — SS 2012

Übungsblatt 5

1. Betrachte ein Finanzmarktmodell auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{6}$.
Der Markt bestehe aus einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut mit $\pi_0 = S_0 = 1$ und $\pi_1 = 5$, $S_1(\omega_1) = 3$, $S_1(\omega_2) = 5$, $S_1(\omega_3) = 6$.

   (i) Prüfe, ob das Marktmodell arbitragefrei und/oder vollständig ist.

   (ii) Nun betrachte in diesem Modell einen Call mit Strikepreis $K = 4$. Ist dieser Claim replizierbar? Bestimme die Menge aller arbitragefreien Preise von C.

2. Betrachte ein Mehrperiodenmodell mit $T \in \mathbb{N}$ und zwei Finanzgütern auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sei $\overline{S}_t = (S_t^0, S_t^1)$ die Zufallsvariable der Preise zum Zeitpunkt $t = 0, ..., T$. Der stochastische Prozess $\overline{S} = (\overline{S}_t)_{t=0,...,T}$ sei adaptiert bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$.
Entscheide, ob die folgenden Prozesse $\xi = (\xi_t)_{t=1,...,T}$ vorhersehbar (previsibel) sind oder ob sie es im Allgemeinen nicht sind:

   (i) $\xi_t = \mathbb{1}_{\{S_t^1 > S_{t-1}^1\}}$

   (ii) $\xi_1 = 1$ und $\xi_t = \mathbb{1}_{\{S_{t-1}^1 > S_{t-2}^1\}}$ für $t \geq 2$

   (iii) $\xi_t = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{\{t > t_0\}}$ mit $t_0 \in \{0, ..., T\}$ und $A \in \mathcal{F}_{t_0}$

   (iv) $\xi_t = \mathbb{1}_{\{S_t^1 > S_0^1\}}$

   (v) $\xi_1 = 1$ und $\xi_t = 2\xi_{t-1}\mathbb{1}_{\{S_{t-1}^1 < S_0^1\}}$ für $t \geq 2$

3. Sei $V = (V_t)_{t=0,...,T}$ der Wertprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie in einem arbitragefreien Mehrperiodenmodell mit $T \in \mathbb{N}$.
Zeige, dass die folgenden beiden Implikationen für alle $t \in \{0, ..., T-1\}$ und $A \in \mathcal{F}_t$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ gelten:

   (i) $\mathbb{P}[V_{t+1} - V_t \geq 0 | A] = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}[V_{t+1} - V_t = 0 | A] = 1$

   (ii) $\mathbb{P}[V_{t+1} - V_t \leq 0 | A] = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}[V_{t+1} - V_t = 0 | A] = 1$

4. Sei $M = (M_t)_{t=0,...,T}$ ein adaptierter Prozess auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}, \mathbb{Q})$, sodass $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|M_t|] < \infty$ für alle $t = 0, ..., T$.
Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) M ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal.

   (ii) $M_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_{t+1} | \mathcal{F}_t]$ für $t = 0, ..., T-1$.

   (iii) Es existiert ein $F \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$, sodass $M_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F | \mathcal{F}_t]$ für alle $t = 0, ..., T$ gilt.

5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das absolutstetig bzgl. $\mathbb{P}$ ist. Dann existiert bekanntlicherweise nach dem Satz von Radon-Nikodym eine Dichte $Z := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiere $Z_t := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{F}_t]$ für $t = 0, ..., T$. Zeige:
   (i) Der Dichteprozess $(Z_t)_{t=0,...,T}$ ist ein Martingal bzgl. $\mathbb{P}$.
   (ii) Ist Y eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable, dann gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_t Y]$

6. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $(X_t)_{t=0,...,T}$ ein Martingal und $(H_t)_{t=1,...,T}$ ein previsibler Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$ mit $\mathbb{E}[|H_t(X_t - X_{t-1})|] < \infty$ für $t = 1, ..., T$. Definiere

$$S_t := \sum_{k=1}^{t} H_k(X_k - X_{k-1}), \quad t = 1, ..., T.$$

   Zeige, dass $(S_t)_{t=1,...T}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t=1,...,T}$ ist.