Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle — SS 2012

Übungsblatt 8

1. Gegeben sei ein Binomialmodell mit $r = 0, u = 1.09$, $d = 0.94, B_0 = 1$ und $S_0 = 1024$. Betrachte einen (europäischen) Butterfly-Spread mit Fälligkeit $T = 12$.
Die Auszahlung beträgt

$$C^{bf} = \begin{cases} S_T - 700, & 700 \leq S_T \leq 850 \\ 1000 - S_T, & 850 \leq S_T \leq 1000 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Sei Z die Anzahl der „guten Tage" (Aufwärtsschritte von S) bis T, also ist $Z \in \{0, 1, ..., T\}$. Dann ist $S_T(\omega) = S_0 u^{Z(\omega)} d^{T-Z(\omega)}, \omega \in \Omega$.

   (i) Für welche Werte von Z wird der Butterfly-Spread ausgeübt ($700 < S_T < 1000$)?
   (ii) Berechne für einen Zeitschritt die risikoneutrale (bedingte) Wahrscheinlichkeit für einen Aufwärtsschritt.
   (iii) Wie ist Z verteilt? Bestimme $\mathbb{P}[Z = i]$ für $i = 0, ..., T$ (symbolisch, nicht rechnerisch).
   (iv) Berechne den arbitragefreien Preis des Butterfly-Spreads zur Zeit $t = 0$.

2. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i = 1, ..., 5$.

$$\begin{tikzcd} B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{9}{8} \arrow[r] & B_2 = \frac{81}{64} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = \frac{2592}{64} \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = \frac{252}{8} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 24 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1(\omega_3) = \frac{234}{8} \arrow[r] & S_2(\omega_{2,3,4}) = \frac{2106}{64} \\
 & S_1(\omega_{4,5}) = \frac{198}{8} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_5) = \frac{1701}{64}
\end{tikzcd}$$

   (i) Berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße im (B, S)-Markt.
   (ii) Der (B, S)-Markt wird um eine Put-Option mit Strikepreis $K = \frac{2187}{64}$ und Fälligkeit $T = 2$ erweitert, wobei der Preisprozess der Put-Option durch

$$P_0 = 19/6, \quad P_1(\omega_{1,2}) = 0, P_1(\omega_3) = 9/8, P_1(\omega_{4,5}) = 45/8, \quad P_2 = (K - S_2)_+$$

   gegeben ist. Berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße für das erweiterte (B, S, P)-Modell.

3. Betrachte im Black-Scholes-Modell den arbitragefreien Preis einer Call-Option $C_t = c(S_t, T-t, K, \sigma, r)$ mit der Funktion

$$c(s,t,K,\sigma,r) = s\Phi(d_1) - e^{-rt}K\Phi(d_2)$$

$$\text{wobei} \quad d_{1,2} = d_{1,2}(s,t,K,\sigma,r) = \frac{\ln(\frac{s}{K}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

   (i) Zeige die Black-Scholes-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = rs\frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - rc$$

   (ii) Berechne das **Vanna** der Option: $\frac{\partial^2 c}{\partial s \partial \sigma}$

   (iii) Berechne das **Volga** der Option: $\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}$

4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,...,T\}}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und sei $Y = (Y_t)_{t\in\{0,...,T\}}$ ein adaptierter Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,...,T\}}$, mit $Y_t \in L^1(\mathbb{P})$ für alle $t = 0, ..., T$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

   (a) Y ist ein Supermartingal.

   (b) $-Y$ ist ein Submartingal.

   (c) $Y_s \geq \mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s]$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$.

   (d) $Y_{t-1} \geq \mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ für alle $t = 1, ..., T$.

5. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,...,T\}}$ eine Filtration.

   (i) Zeige, dass eine Funktion $\tau\colon \Omega \to \{0, ..., T\} \cup \{+\infty\}$ genau dann eine Stoppzeit ist, wenn $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t = 0, ..., T$.

   (ii) Zeige, falls τ und σ zwei Stoppzeiten sind, dann sind es auch $\tau \vee \sigma, \tau \wedge \sigma$ und $(\tau + \sigma) \wedge T$.

6. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,...,T\}}$ eine Filtration und τ eine Stoppzeit. Definiere

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} |\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \text{ für alle } t = 0, ..., T\}$$

   Zeige die folgenden Aussagen:

   (i) $\mathcal{F}_\tau$ ist eine σ-Algebra.

   (ii) $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} |\ A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t \ \text{ für alle } t = 0, ..., T\}$.

   (iii) $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$, falls $\tau(\omega) = t$ für alle $\omega \in \Omega$.

   (iv) $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$, falls $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.