Aufgabensammlung zur VU Ökonometrie II
SS 2012

Ulrike Schneider

1 Aufgaben zu Kapitel 1

1.1) Zeigen Sie unter den Annahmen A2 und B2 für das lineare Regressionsmodell mit stochastischen Regressoren die Existenz folgender Momente:

$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(XX')$, $\mathrm{E}(X'u)$, $\mathrm{E}(X^+u)$, $\mathrm{E}(X^+uu'(X^+)')$, $\mathrm{E}(\sigma^2_{\mathrm{LS}}(X'X)^{-1})$

Hinweis: Sie können vermutlich die meisten Schritte zusammenfassen, indem Sie sich einmal überlegen, dass folgende (nicht überraschende) Aussagen gelten:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine zufällige Matrix, sodass $\mathrm{E}(A'A)$ existiert, so besitzen die Komponenten von A endliche 2. Momente.

(b) Besitzen die Einträge der zufälligen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ endliche 2. Momente, so existiert $\mathrm{E}(AB)$.

1.2) Wiederholen Sie verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen von Zufallsvariablen (fast sichere Konvergenz, Konvergenz im quadrat. Mittel, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Konvergenz in Verteilung) und die wichtigsten Aussagen darüber, welche Konvergenzarten (und unter welchen Bedingungen) welche anderen Konvergenzarten implizieren.

1.3) Zeigen Sie, dass Satz 1.2 auch noch gilt, wenn die Bedingungen B1 und B2 durch folgende Annahmen ersetzt werden:

(a) $\mathrm{E}(u) = 0$, $\mathrm{E}(uu') = \sigma^2 \mathbb{I}_T$

(b) Die Regressoren sind prädeterminiert.

Hinweis: Überlegen Sie, dass $X'u = \sum_{t=1}^{T} u_t x(t)'$ und $X'X = \sum_{t=1}^{T} x(t)'x(t)$ gilt und zeigen Sie (analog zur VO), dass

$$\frac{1}{T^2}\mathrm{E}(X'uu'X) \longrightarrow 0$$

2 Aufgaben zu Kapitel 2

2.1) Zeigen Sie, dass der IV-Schätzer $\hat{\beta}_{\text{IV}} = (Z'X)^{-1}Z'y$ gleich dem 2-stage least-squares Schätzer $\hat{\beta}_{\text{2SLS}}$ ist. Letzterer wird folgendermaßen berechnet.

- Regressiere X auf Z und bilde die gefitteten Werte $\hat{X}_Z$.
- Regressiere y auf $\hat{X}_Z$. Der resultierende Schätzer ist $\hat{\beta}_{\text{2SLS}}$.

Hinweis: Ausrechnen (kein Frisch-Waugh nötig ...).

2.2) Zeigen Sie, dass $\beta_{\text{GMM}} = (X'ZW_TZ'X)^{-1}X'ZW_TZ'y$ gilt. Welche Annahmen benötigen Sie dazu?

2.3) Diskutieren Sie Kapitel 4.8.3 aus Cameron & Trivedi (2005) (heuristischer Zugang zum IV-Schätzer im Fall $l = k = 1$).

2.4) Beweisen Sie Konsistenz und asymptotische Normalität des GMM-Schätzers analog zum Beweis von Satz 1.5.

2.5) Zeigen Sie: Ist $z \sim N(0, \mathbb{I}_n)$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und idempotent, so gilt $z'Az \sim \chi^2_{\text{tr}(A)}$, wobei $\text{tr}(A)$ die Spur von A bezeichnet.

2.6) Zeigen Sie, dass für $\hat{u} = y - X\hat{\beta}$ der Schätzer

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{T}\hat{u}'\hat{u}$$

unter Annahme $(N1)_{\text{GMM}}$ konsistent für $\sigma^2 := \text{E}(u_t^2)$ ist – vorausgesetzt es existieren 2. Momente für u_t und $x(t)$ und $\hat{\beta}$ ist ein konsistenter Schätzer für β.

Hinweis: Schreiben (zeigen) Sie $\hat{u}_t = y_t - x(t)(\hat{\beta} - \beta)$ und quadrieren Sie diesen Ausdruck bevor Sie über t summieren.

3 Aufgaben zu Kapitel 3

3.1) Wiederholen Sie das Frisch-Waugh Theorem.

3.2) Zeigen Sie

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{\text{POLS}} &= \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{\bar{x}})'(x_{it} - \bar{\bar{x}})\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{\bar{x}})'(y_{it} - \bar{\bar{y}})\\
\hat{\beta}_{\text{B}} &= \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})'(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})'(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})\\
\hat{\beta}_{\text{W}} &= \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_i)'(x_{it} - \bar{x}_i)\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_i)'(y_{it} - \bar{y}_i)
\end{aligned}$$

und geben Sie die entsprechenden Matrizen in den Darstellungen

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{\text{POLS}} &= \left(\tilde{X}' M_{\text{POLS}} \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}' M_{\text{POLS}} y \\
\hat{\beta}_{\text{B}} &= \left(\tilde{X}' M_{\text{B}} \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}' M_{\text{B}} y \\
\hat{\beta}_{\text{W}} &= \left(\tilde{X}' M_{\text{W}} \tilde{X}\right)^{-1} \tilde{X}' M_{\text{W}} y
\end{aligned}$$

an.

3.3) Zeigen Sie, dass die Inverse zu $A = \mathbb{I}_n + a e_n e_n'$ gleich $\mathbb{I}_n - \frac{a}{1+aT}\, e_n e_n'$ ist.

3.4) Zeigen Sie $M_{\text{W}} M_{\text{B}} = M_{\text{B}} M_{\text{W}} = 0$.

3.5) Zeigen Sie, dass M_{GLS} nicht idempotent ist.

3.6) Zeigen Sie, dass $\hat{\alpha}_{\text{GLS}} = \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}} \hat{\beta}_{\text{GLS}}$ gilt.

3.7) Zeigen Sie (analog zum within-Schätzer) dass

$$\sqrt{NT}(\hat{\beta}_{\text{GLS}} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_u^2 (Q_{\text{W}} + \bar{\psi} Q_{\text{B}})^{-1})$$

im random-effects Modell bei $NT \to \infty$.

3.8) Überlegen Sie (anhand Ihrer Ökonometrie I Notizen), was bei N fix und $T \to \infty$ im random-effects Modell passieren kann, sodass der (P)OLS-Schäzter nicht konsistent ist. [Unter gewissen Bedingungen ist der OLS-Schätzer im allg. linearen Regressionsmodell ja sehr wohl konsistent. Was geht hier möglicherweise schief?]