Aufgabensammlung zur VU Ökonometrie II
SS 2013

Ulrike Schneider

1 Aufgaben zu Kapitel 1

1.1) Zeigen Sie unter den Annahmen A2 und B2 für das lineare Regressionsmodell mit stochastischen Regressoren die Existenz folgender Momente:

$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(XX')$, $\mathrm{E}(X'u)$, $\mathrm{E}(X^{+}u)$, $\mathrm{E}(X^{+}uu'(X^{+})')$, $\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2_{\mathrm{LS}}(X'X)^{-1})$

Hinweis: Sie können vermutlich die meisten Schritte zusammenfassen, indem Sie sich einmal überlegen, dass folgende (nicht überraschende) Aussagen gelten:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine zufällige Matrix, sodass $\mathrm{E}(A'A)$ existiert, so besitzen die Komponenten von A endliche 2. Momente.

(b) Besitzen die Einträge der zufälligen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ endliche 2. Momente, so existiert $\mathrm{E}(AB)$.

1.2) Wiederholen Sie verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen von Zufallsvariablen (fast sichere Konvergenz, Konvergenz im quadrat. Mittel, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Konvergenz in Verteilung) und die wichtigsten Aussagen darüber, welche Konvergenzarten (und unter welchen Bedingungen) welche anderen Konvergenzarten implizieren.

1.3) Wiederholen Sie den Satz vom Cramer-Wold device.

1.4) Zeigen Sie, dass Satz 1.2 auch noch gilt, wenn die Bedingungen B1 und B2 durch folgende Annahmen ersetzt werden:

(a) $\mathrm{E}(u) = 0$, $\mathrm{E}(uu') = \sigma^2 \mathbb{I}_T$

(b) Die Regressoren $\{x(t), x(t-1), x(t-2), \dots\}$ und die vorangegangenden Fehler $\{u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3}, \dots\}$ sind uabhängig von $\{u_t, u_{t+1}, u_{t+2}, \dots\}$.

[Auch diese Bedingung wird manchmal prädeterminiert oder auch exogen genannt.]

Hinweis: Überlegen Sie, dass $X'u = \sum_{t=1}^{T} u_t x(t)'$ und $X'X = \sum_{t=1}^{T} x(t)'x(t)$ gilt und zeigen Sie (analog zur VO), dass

$$\frac{1}{T^2}\mathrm{E}(X'uu'X) \longrightarrow 0$$

2 Aufgaben zu Kapitel 2

2.1) Zeigen Sie, dass der IV-Schätzer $\hat{\beta}_{\text{IV}} = (Z'X)^{-1}Z'y$ gleich dem 2-stage least-squares Schätzer $\hat{\beta}_{\text{2SLS}}$ ist. Letzterer wird folgendermaßen berechnet.

- Regressiere X auf Z und bilde die gefitteten Werte $\hat{X}_Z$.
- Regressiere y auf $\hat{X}_Z$. Der resultierende Schätzer ist $\hat{\beta}_{\text{2SLS}}$.

2.2) Diskutieren Sie Kapitel 4.8.3 aus Cameron & Trivedi (2005) (heuristischer Zugang zum IV-Schätzer im Fall $l = k = 1$).

2.3) Zeigen Sie, dass $\hat{\beta}_{\text{GMM}} = (X'ZW_TZ'X)^{-1}X'ZW_TZ'y$ gilt. Welche Annahmen benötigen Sie dazu?

2.4) Beweisen Sie Konsistenz und asymptotische Normalität des GMM-Schätzers analog zum Beweis von Satz 1.6.

2.5) Zeigen Sie anhand eines Simulationsbeispiels, wie der IV-Schätzer $\hat{\beta}_{\text{IV}}$ den OLS-Schätzer verbessert. [Betrachten Sie zum Beispiel das lineare Regressionsmodell $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$ mit $(x_t, u_t, z_t)' \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \Sigma)$, wobei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \sigma_2^2 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie die Parameter geeignet, sodass Σ positiv definit ist. Als Instrument für x_t können Sie dann z_t verwenden.]

2.6) Zeigen Sie: Ist $z \sim N(0, \mathbb{I}_n)$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und idempotent, so gilt $z'Az \sim \chi^2_{\mathrm{tr}(A)}$, wobei $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A bezeichnet.

2.7) Zeigen Sie, dass für $\hat{u} = y - X\hat{\beta}$ der Schätzer

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{T}\hat{u}'\hat{u}$$

unter Annahme $(N1)_{\text{GMM}}$ konsistent für $\sigma^2 := \mathrm{E}(u_t^2)$ ist – vorausgesetzt es existieren 2. Momente für u_t und $x(t)$ und $\hat{\beta}$ ist ein konsistenter Schätzer für β.

Hinweis: Schreiben (zeigen) Sie $\hat{u}_t = u_t - x(t)(\hat{\beta} - \beta)$ und quadrieren Sie diesen Ausdruck bevor Sie über t summieren.

3 Aufgaben zu Kapitel 3

3.1) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\beta}_{\mathrm{W}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)'(x_{it} - \bar{x}_i) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)'(y_{it} - \bar{y}_i)$$

gilt.

3.2) Zeigen Sie aus Satz 3.1 (ii) die Aussage, dass $\mathrm{VC}(\hat{\beta}_{\mathrm{W}}) = \sigma_u^2 (X' M_{\mathrm{W}} X)^{-1}$ und Satz 3.1 (iii).

3.3) Zeigen Sie, dass die Inverse zu $A = \mathbb{I}_n + a e_n e_n'$ gleich $\mathbb{I}_n - \frac{a}{1+an}\, e_n e_n'$ ist.

3.4) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{\mathrm{POLS}} &= \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{\bar{x}})'(x_{it} - \bar{\bar{x}}) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{\bar{x}})'(y_{it} - \bar{\bar{y}}) \\
\hat{\alpha}_{\mathrm{POLS}} &= \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}} \hat{\beta}_{\mathrm{POLS}} \\
\hat{\beta}_{\mathrm{B}} &= \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})'(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})'(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}) \\
\hat{\alpha}_{\mathrm{B}} &= \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}} \hat{\beta}_{\mathrm{B}}.
\end{aligned}$$

3.5) Fitten Sie verschiedene Paneldatenmodelle für den Datensatz *Mom.dat* aus Cameron & Trivedi (Kapitel 21.3) und testen Sie zwischen den Modellen. Dabei sollen Sie jeweils die Variable *lnhrs* (log of annual hours worked) auf *lnwg* (log of hourly wage) [und ev. weitere Variable] regressieren.