# Aufgabensammlung zur VU Ökonometrie II
# 2015S

Ulrike Schneider

## 1 Aufgaben zu Kapitel 1

1.1) Zeigen Sie unter den Annahmen A2 und B2 für das lineare Regressionsmodell mit stochastischen Regressoren die Existenz folgender Momente:

$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(XX')$, $\mathrm{E}(X'u)$, $\mathrm{E}(X^+u)$, $\mathrm{E}(X^+uu'(X^+)')$, $\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2_{\mathrm{LS}}(X'X)^{-1})$

Hinweis: Sie können vermutlich die meisten Schritte zusammenfassen, indem Sie sich einmal überlegen, dass folgende (nicht überraschende) Aussagen gelten:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine zufällige Matrix, sodass $\mathrm{E}(A'A)$ existiert, so besitzen die Komponenten von $A$ endliche 2. Momente.

(b) Besitzen die Einträge der zufälligen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ endliche 2. Momente, so existiert $\mathrm{E}(AB)$.

1.2) Wiederholen Sie verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen von Zufallsvariablen (fast sichere Konvergenz, Konvergenz im quadrat. Mittel, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Konvergenz in Verteilung) und die wichtigsten Aussagen darüber, welche Konvergenzarten (und unter welchen Bedingungen) welche anderen Konvergenzarten implizieren.

1.3) Wiederholen Sie den Satz vom Cramer-Wold device.

1.4) Zeigen Sie, dass Satz 1.2 auch noch gilt, wenn die Bedingungen B1 und B2 durch folgende Annahmen ersetzt werden:

(a) $\mathrm{E}(u) = 0$, $\mathrm{E}(uu') = \sigma^2\mathbb{I}_T$

(b) Die Regressoren $\{x(t), x(t-1), x(t-2), \dots\}$ und die vorangegangenden Fehler $\{u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3}, \dots\}$ sind unabhängig von $\{u_t, u_{t+1}, u_{t+2}, \dots\}$.

[Diese Bedingung wird manchmal prädeterminiert oder auch exogen genannt.]

Hinweis: überlegen Sie, dass $X'u = \sum_{t=1}^{T} u_t x(t)'$ und $X'X = \sum_{t=1}^{T} x(t)'x(t)$ gilt und zeigen Sie (analog zur VO), dass

$$\frac{1}{T^2}\mathrm{E}(X'uu'X) \longrightarrow 0$$

1.5) Geben Sie ein Gegenbeispiel für ein *continuous mapping theorem* für Konvergenz im $r$-ten Mittel an.

# $\boxed{2}$ Aufgaben zu Kapitel 2

2.1) Zeigen Sie anhand eines Simulationsbeispiels, wie der IV-Schätzer $\hat{\beta}_{\text{IV}}$ den OLS-Schätzer verbessert. [Betrachten Sie zum Beispiel das lineare Regressionsmodell $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$ mit $(x_t, u_t, z_t)' \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \Sigma)$, wobei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \sigma_2^2 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie die Parameter geeignet, sodass $\Sigma$ positiv definit ist. Als Instrument für $x_t$ können Sie dann $z_t$ verwenden.]

Überlegen Sie, welche Größe der OLS-Schätzer in diesem Beispiel eigentlich schätzt.

2.2) Leiten Sie die Formel für den GIV-Schätzer $\hat{\beta}_{\text{GIV}}$ aus in der VO angegebenen zweistufigen Prozedur her und zeigen Sie, dass diese im Fall $l = k$ mit dem IV-Schätzer übereinstimmt.

2.3) Leiten Sie den in der VO angegebenen expliziten Ausdruck für $\hat{\beta}_{\text{GMM}}$ her. Welche Annahmen benötigen Sie dazu?

2.4) Beweisen Sie Konsistenz und asymptotische Normalität des GMM-Schätzers (Satz 2.1) analog zum Beweis von Satz 1.5.

2.5) Zeigen Sie: Ist $z \sim N(0, \mathbb{I}_n)$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und idempotent, so gilt $z'Az \sim \chi^2_{\text{tr}(A)}$, wobei $\text{tr}(A)$ die Spur von $A$ bezeichnet.

2.6) Zeigen Sie, dass für $\hat{u} = y - X\hat{\beta}$ der Schätzer

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{T}\hat{u}'\hat{u}$$

unter Annahme $(N1)_{\text{GMM}}$ konsistent für $\sigma^2 := \text{E}(u_t^2)$ ist – vorausgesetzt es existieren 2. Momente für $u_t$ und $x(t)$ und $\hat{\beta}$ ist ein konsistenter Schätzer für $\beta$.

Hinweis: Schreiben (zeigen) Sie $\hat{u}_t = u_t - x(t)(\hat{\beta} - \beta)$ und quadrieren Sie diesen Ausdruck bevor Sie über $t$ summieren.

2.7) Verwenden Sie den Datensatz *USConsump1993* aus dem `R`-Paket *AER* und schätzen Sie die Gleichung (Keynesian consumption function)

$$\textit{expenditure} = \beta_1 + \beta_2\,\textit{income}_t + u_t$$

(a) mit OLS und

(b) mit IV mithilfe des Instruments *investment*, das durch *income* $=$ *expenditure* $+$ *investment* gegeben ist.

(c) Führen Sie einen sog. Hausman-Test durch, um zu überprüfen, ob ein Endogenitätsproblem vorliegt (also der IV-Schätzer tatsächlich gebraucht wird): Unter $H_0$: „kein Endogenitätsproblem“, gilt

$$(\hat{\beta}_{\text{IV}} - \hat{\beta}_{\text{LS}})'(\hat{V}_{\text{IV}} - \hat{V}_{\text{LS}})^{-1}(\hat{\beta}_{\text{IV}} - \hat{\beta}_{\text{LS}}) \xrightarrow{d} \chi^2_k,$$

wobei $\hat{V}_{\text{LS}}$ bzw. $\hat{V}_{\text{IV}}$ (sinnvolle) Schätzer für die VC-Matrix von $\hat{\beta}_{\text{LS}}$ bzw. $\hat{\beta}_{\text{IV}}$ sind.

2.8) Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix $A$ und $c > 0$ die Beziehung $A \leq cI$ genau dann gilt wenn $\lambda_{\max}(A) \leq c$ gilt.

# 3 Aufgaben zu Kapitel 3

3.1) Wiederholen Sie das Frisch-Waugh Theorem.

3.2) Schreiben Sie nochmal die Matrizen $E = E_{\text{NT}} := I_N \otimes \iota_T$ und $J_{\text{NT}} := I_N \otimes \iota_T \iota_T'$ und ihre Dimensionen an. In welchem Zusammenhang treten diese Matrizen im FE-Modell auf?

3.3) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\beta}_{\text{W}} = \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)'(x_{it} - \bar{x}_i) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)'(y_{it} - \bar{y}_i)$$

gilt.

3.4) Zeigen Sie Satz 3.1 (iii).

3.5) Argumentieren Sie, dass folgende Formeln gelten.

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{\text{POLS}} &= \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{\bar{x}})'(x_{it} - \bar{\bar{x}}) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{\bar{x}})'(y_{it} - \bar{\bar{y}}) \\
\hat{\alpha}_{\text{POLS}} &= \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}} \hat{\beta}_{\text{POLS}} \\
\hat{\beta}_{\text{B}} &= \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})'(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})'(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}) \\
\hat{\alpha}_{\text{B}} &= \bar{\bar{y}} - \bar{\bar{x}} \hat{\beta}_{\text{B}}.
\end{aligned}$$

3.6) Zeigen Sie, dass die Inverse zu $A = \mathbb{I}_n + a\iota_n \iota_n'$ gleich $\mathbb{I}_n - \frac{a}{1+an} \iota_n \iota_n'$ ist.

3.7) In der Notation der Vorlesung, zeigen Sie folgende Proposition 3.3 (bzw wiederholen Sie das entsprechende Argument).

(a) $\frac{1}{T} J_{\text{NT}} \iota_{\text{NT}} = \iota_{\text{NT}}$ und $\frac{1}{T} J_{\text{NT}} \iota_{\text{NT}} \iota_{\text{NT}}' = \iota_{\text{NT}} \iota_{\text{NT}}'$

(b) $M_{\text{POLS}} = M_{\text{W}} + M_{\text{B}}$.

(c) $M_{\text{B}}$, $M_{\text{W}}$ und $M_{\text{POLS}}$ sind symmetrisch und idempotent.

(d) $M_{\text{W}} M_{\text{B}} = M_{\text{B}} M_{\text{W}} = 0$

(e) $M_{\text{W}} \Omega = \sigma_u^2 M_{\text{W}}$
$M_{\text{B}} \Omega = \frac{\sigma_u^2}{\psi} M_{\text{B}}$
$M_{\text{POLS}} \Omega = \sigma_u^2 (M_{\text{W}} + \frac{1}{\psi} M_{\text{B}})$

3.8) Zeigen Sie die verbleibenden Punkte aus Satz 3.4.

3.9) Fitten Sie verschiedene Paneldatenmodelle für den Datensatz *Mom.dat* aus Cameron & Trivedi (Kapitel 21.3). Dabei sollen Sie jeweils die Variable *lnhrs* (log of annual hours worked) auf *lnwg* (log of hourly wage) [und ev. weitere Variable] regressieren.