ÜBUNGSBLATT 4

18) Die Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ sei stetig gleichverteilt, $X_i \sim U_{0,1}$. Zu den Ordnungsstatistiken bestimme man:

a) die Dichte von $X_{(k)}$;

b) die gemeinsame Dichte von $X_{(1)}, X_{(n)}$;

c) die Dichte der *Spannweite* $R := X_{(n)} - X_{(1)}$;

d) die Grenzverteilung für $2n(1-R)$ bei $n \to \infty$.

19) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels, zeige man, daß für k_n mit $k_n/n \to p$ für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$P[|X_{(k_n)} - p| < \epsilon] \to 1$$

für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt.

20) Die stochastische Größe X sei stetig verteilt und $0 < p < 1$. Dann konvergiert das Stichprobenquantil in der Wahrscheinlichkeit gegen das Quantil x_p der Verteilung.

Hinweis: Man führe die Problemstellung auf die Aussage des letzten Beispiels zurück.

21) **a)** Man zeige, daß die momenterzeugende Funktion von $T = (T_1, \ldots, T_k)$ bei einer natürlich parametrisierten k-dimensionalen Exponentialfamilie die Form

$$\Psi(t) = \mathbb{E} \exp(t^\top T) = \frac{C(\theta_1, \ldots, \theta_k)}{C(\theta_1 + t_1, \ldots, \theta_k + t_k)}$$

für $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ hat. (Satz 2.6 ii))

b) Man führe für die Normalverteilung eine natürliche Parametrisierung ein. Wie läßt sich dann die momenterzeugende Funktion der Normalverteilung mit der Darstellung aus (a) herleiten?

22) Eine diskrete stochastische Größe auf $\mathbb{N}$ folgt einer *Potenzreihenverteilung*, wenn die Punktwahrscheinlichkeiten in der Form

$$\mathbf{P}_\theta[X = k] \; = \; c(\theta)^{-1} \; g(k)\theta^k$$

wobei $g(.) \geq 0$, $\theta > 0$ und

$$c(\theta) \; = \; \sum_{i=0}^{\infty} g(i)\theta^i \; .$$

Für eine Stichprobe einer Verteilung solchen Typs zeige man:

a) $\mathbf{P}_\theta$ bilden für $\theta > 0$ eine Exponentialfamilie.

b) $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ bilden für jedes n eine Potenzreihenverteilung;

c) Man gebe Wahrscheinlichkeitsverteilungen solchen Typs an.