

ÜBUNGSBLATT 10

- 48) X_1, \dots, X_n sei eine Stichprobe. Bei Gültigkeit der Hypothese H_0 hat X die Dichte

$$f(x) = 2x \quad 0 < x < 1.$$

Die alternative Hypothese H_1 sieht für X eine stetige Gleichverteilung $X \sim U_{(0,1)}$ vor. Geben Sie den UMP-Test zum Niveau α für diese Hypothesen an.

- 49) Man entwickle den UMP-Test für eine Alternativ-verteilte Stichprobe $X_i \sim A_p, i = 1, \dots, n$, zum Niveau α für $H_0 : p = p_0$ und $H_1 : p = p_1, p_1 > p_0$ und begründe, weshalb dieser Test auch trennscharf für $H_0 : p \leq p_0$ und $H_1 : p > p_0$ ist.
- 50) Eine Folge von Testfunktionen (φ_n, H_0, H_1) zum Niveau α heißt *konsistent*, wenn für die Gütefunktion $\beta_n(\theta)$ von φ_n

$$\beta_n(\theta) \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle $\theta \in \Theta_1$ gilt. Man zeige, daß die Folge der UMP-Tests φ_n für n normalverteilte Beobachtungen $X_i \sim N(\theta, \sigma_0^2)$ mit bekannter Varianz σ_0^2 für folgende Hypothesen konsistent ist.

- a) $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$.
- b) $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- 51) Für die Wahrscheinlichkeit p der Alternativ-verteilten Beobachtungen aus Beispiel 49) sei die a-priori Verteilung eine stetige Gleichverteilung $p \sim U_{0,1}$. Man entwickle einen Bayes-Test für $H_0 : p \leq \theta_0$ gegen $H_1 : p > \theta_0$. (Verlust $K_0 = K_1 = 1$.)
- 52) Mit dem beidseitigen Test (Beispiel 4.3 der Vorlesung) für stetig gleichverteilte Beobachtungen $X_i \sim U_{(0,\theta)}$ gebe man ein Konfidenzintervall mit ÜDW κ für θ an. Ist dieses Konfidenzintervall gleichmäßig trennscharf?
- 53) X_1, \dots, X_n sind unabhängige Lebensdauerwerte, die Weibull-verteilt mit der Dichte

$$f(x) = 2 \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right) \quad \text{für } x > 0.$$

- a) Man konstruiere eine Pivot-Größe für θ .
- b) Es soll je ein 95% Konfidenzintervall für θ und für die Zuverlässigkeitsfunktion $\tau = P_\theta[X > t]$ (bei festem t) angegeben werden.
- 54) Man zeige, daß jeder Bayes-Test für einfache parametrische Hypothesen $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta = \theta_1$ auch ein UMP-Test für diese Hypothesen (zu einem gewissen Niveau) ist.