3. Übung Mathematische Statistik SS14

1. Zeigen Sie: wenn für jede Stichprobengröße n ein ein gleichmäßig optimaler Test für $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$ exitiert und die Dichten $f(x, \theta)$ positiv sind, dann gilt für $\theta > \theta_0$

$$\phi(x, \theta) = \log(\frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta_0)}) = g(x)h(\theta).$$

   (Zeigen Sie, dass für $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \theta_1, \theta_2 > \theta_0$ nicht gleichzeitig $n_1\phi(x_1, \theta_1) + n_2\phi(x_2, \theta_1) > 0$ und $n_1\phi(x_1, \theta_2) + n_2\phi(x_2, \theta_2) < 0$ gelten kann und folgern Sie daraus, dass $\phi(., \theta_1)$ und $\phi(., \theta_2)$ proportional sind.

2. $(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine Stichprobe einer Gleichverteilung auf $[0, \theta]$. Bestimmen Sie einen gleichmäßig optimalen Test für $H_O : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta < \theta_0$.

3. Zeigen Sie, dass der Test aus dem vorigen Beispiel so modifiziert werden kann, dass er auch optimal für die Alternative $\theta > \theta_0$ ist.

4. Zeigen Sie: wenn das Modell (P_θ) monotone Dichtequotienten besitzt, dann ist der optimale Test für $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$ auch optimal für $H_0 : \theta \leq \theta_0$ mit demselben Niveau.

5. (P_θ) sei eine natürlich parametrisierte Exponentialfamilie, die determiniert ist (d.h., für $\theta_1 \neq \theta_2$ ist $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$). Zeigen Sie, dass $\log L$ eine strikt konkave Funktion von θ ist und daher ein eindeutig bestimmtes Maximum hat (den ML-Schätzer).

6. Bestimmen Sie für zwei Exponentialverteilungen die Hellinger-Integrale h_α und $\min_{0 \leq \alpha \leq 1} h_\alpha$.

7. Wie vorher, für zwei Poissonverteilungen.